Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

Hovtun, Dreyer

Definisjoner på firkanter i lærebøker

Innledning

> «Når jeg bruker et ord, betyr det nøyaktig det jeg bestemmer at det skal bety – verken mer eller mindre.» – Humpty Dumpty

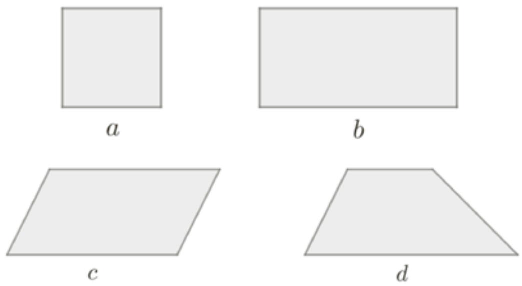
Forestill deg at du er på Jæren i Rogaland og skal handle ingredienser til en eplekake. Du går til grønnsakhandleren og ber om å få en pose med epler. Du får posen, men når du kikker oppi, oppdager du at den ikke inneholder epler, men poteter!

I Norge er det stort sett enighet om at ordet *eple* står for en søt og syrlig frukt som vokser på trær. Blant jærbuer er det derimot vanlig at ordet *eple* også benyttes om en anvendelig grønnsak som vokser i jorden, og som ofte omtales som *potet*. Som eksempelet viser, er det ikke alltid enighet om hva betydningen til et ord er, noe som kan føre til forvirring.

Gaute Hovtun
Universitetet i Stavanger
gaute.hovtun@uis.no

Tore Dreyer
Universitetet i Stavanger
tore.dreyer@uis.no

Dette er en fagfellevurdert artikkel på nivå 1. Tangenten er et sted der læreres og forskeres perspektiv på matematikkundervisning møtes og derfor har vi med praksisrelaterte forskningsartikler. Les mer: www.tangenten.no/nivaa1



Figur 1

Mangel på enighet om hva som ligger i et ord, er også til stede i matematikken. La oss nå tenke at vi går inn i en matematikkbutikk og ber om å få en pose *trapeser*. Hvilke av firkantene[1] i Figur 1 ville vi fått med oss i posen?

Det kommer helt an på hvilken definisjon matematikkforhandleren har på trapes. Dersom han definerer trapeset som «en firkant med *nøyaktig* to parallelle sider», vil vi bare få med oss firkant *d*. Definisjonen *ekskluderer* firkantene *a*, *b* og *c*, fordi disse har mer enn to parallelle sider. Matematikkforhandleren kan også definere trapeset som «en firkant med *minst* to parallelle sider». Nå vil vi få med oss både firkant *a*, *b*, *c* og *d* siden definisjonen *inkluderer* figurene som har mer enn to parallelle sider.

Hovtun, G., Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 34–47.

www.caspar.no/tangenten

Selv om innholdet i posen blir forskjellig alt etter hvilken matematikkforhandler du går til, er det ingen av dem som tar feil (de Villiers, 1994, 2010). Det er imidlertid stor variasjon i hvilken type definisjon som blir brukt på nettsider, i læreverk og i ordbøker. I det matematiske fagmiljøet er det mest vanlig å definere et trapes inkluderende (Usiskin & Griffin, 2008). En studie av amerikanske lærebøker (Usiskin & Griffin, 2008) viste imidlertid for eksempel at de fleste av lærebøkene benyttet ekskluderende definisjoner. I en matematisk ordbok utgitt av det russiske utdanningsdepartementet presiseres det at trapeset har to sider som er parallelle, og at de andre to ikke er parallelle (Romanov et al., 2003, s. 154). Den nettbaserte ordboka *Wolfram MathWorld* lar være å presisere om trapeset har nøyaktig eller minst to parallelle sider (Weinstein, 2023), mens matematikk.org (2003) presiserer at trapeset har minst to parallelle sider. Denne dualiteten i definisjon av begrepet trapes kan være forvirrende for både elever og lærere, særlig dersom forskjellige definisjoner for samme element blir brukt om hverandre.

I Norge har tradisjonelt sett lærebøkene i matematikk hatt stor innvirkning på lærernes undervisning (Alseth et al., 2003; Kongelf, 2015; Mullis et al., 2012), og det er rimelig å anta at lærebøkenes definisjoner er de definisjonene elevene blir gjort kjent med (Zaslavsky & Shir, 2005). Johansson (2017) viser også at lærebøkene er med på å legge føringer for pedagogiske valg lærere gjør, og Bolstad (2020) viser at lærere synes det er vanskelig å løsrive seg fra innholdet bøkene legger opp til. Lærebøkene spiller med andre ord en rolle for både hva som blir tatt opp i undervisningen, og hvordan det blir tatt opp. Kongelf (2015) har forsket på kvaliteten på innholdet i norske matematikklærebøker, da knyttet til algebra. Der konkluderes det blant annet med at lærebøkene inneholder «feilaktige formuleringer, illustrasjoner og matematiske resonnement, som legger forholdene til rette for utvikling av misoppfatninger» (s. 83).

Med dette som bakteppe ønsket vi å undersøke om norske matematikklærebøker har korrekte definisjoner på firkanter, eller om det også her er formuleringer som er misvisende. Er det en felles forståelse for hvordan firkanter defineres på tvers av norske læreverk, eller eksisterer det en eple-/potetproblematikk? Artikkelens forskningsspørsmål ble dermed:

Hvordan defineres firkanter i norske matematikklærebøker for grunnskolen?

Teori

Matematiske definisjoner

For at et begrep skal gi mening, trenger vi gode definisjoner. Men hva er en god definisjon? Winicki-Landman og Leikin (2000) har foreslått noen prinsipper som bør gjelde for matematiske definisjoner, blant annet:

– Å definere er å gi navn til et begrep.
– For å definere nye begrep kan bare tidligere definerte begrep brukes.
– En definisjon har med nødvendige og tilstrekkelige betingelser for begrepet.
– Definisjonen bør inneholde så få betingelser som mulig.

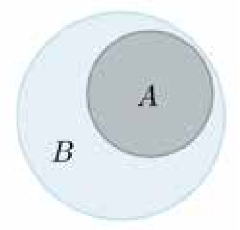
I tillegg understreker Poincaré (1914) at når vi arbeider med elever, er det et ekstra punkt som må vektlegges – definisjonen må formuleres på en måte som elevene har mulighet til å forstå.

Nødvendige og tilstrekkelige betingelser

En god matematisk definisjon må ifølge det tredje punktet inneholde både nødvendige og tilstrekkelige betingelser (Winicki-Landman & Leikin, 2000; Poincaré, 1914; Zazkis & Leikin, 2008). Det betyr at definisjonen skal gjelde for alle elementene man ønsker å definere, og bare for dem. La oss ta følgende definisjon på et kvadrat som eksempel: «et kvadrat er en firkant der alle sidene er like lange». Betingelsene at figuren er en firkant, og at alle sider er like lange, er nødvendige betingelser for kvadrat. Definisjo-

Hovtun, G., Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 34–47.

www.caspar.no/tangenten



Figur 2

nen inkluderer imidlertid også figurer som ikke er kvadrater, nemlig romber (der vinklene ikke er rette). Definisjonen omfatter da noen elementer vi ikke ønsker å inkludere, og inneholder derfor ikke tilstrekkelige betingelser. Knyttet opp til Figur 2 illustrerer den mørkegrå sirkel A alle kvadrater. Den lysegrå sirkelen B inneholder alle romber, som inkluderer alle kvadrater. Definisjonen skal bare inkludere elementene i A, men inkluderer feilaktig alle elementene i både A og B. At en definisjon ikke inneholder tilstrekkelige betingelser, er en vanlig feil som forekommer når firkanter skal defineres (Zazkis & Leikin, 2008). Videre kan vi se på definisjonen «et parallellogram er en firkant som har to og to parallelle sider, og der vinklene ikke er 90°». Dette er et eksempel på en definisjon med tilstrekkelige, men ikke nødvendige betingelser. Definisjonen garanterer at du ender opp med et parallellogram, men det finnes også spesialtilfeller av parallellogram som blir utelatt av definisjonen – rektangler og kvadrater ekskluderes. Knyttet til Figur 2 kan vi si at i sirkel B er alle parallellogram, men det er bare parallellogrammene i sirkel A som blir inkludert av definisjonen.

Minimumsdefinisjoner

En god definisjon skal også inneholde så få betingelser som mulig. Dette punktet gjenkjennes fra læreplanen LK20. Etter 6. trinn skal elevene «beskrive […] minimumsdefinisjoner av to- og tredimensjonale figurer og forklare hvilke egenskaper figurene har felles, og hvilke egenskaper som skiller dem fra hverandre» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det finnes ingen liste med allmenn aksepterte minimumsdefinisjoner på firkanter, og det finnes flere forskjellige minimumsdefinisjoner til hver firkant (Zazkis & Leikin, 2008). Felles for alle er at de inneholder nødvendige og tilstrekkelige betingelser, uten overflødig informasjon. Ta følgende definisjoner på en rombe som eksempel:

a) En rombe er en firkant der alle sidene er like lange.
b) En rombe er et parallellogram der alle sidene er like lange.

Her inneholder begge definisjonene nødvendige og tilstrekkelige betingelser, men bare a) er en minimumsdefinisjon. I definisjon b) er det ikke nødvendig å påpeke at det er et parallellogram. Siden et parallellogram kan defineres som «en firkant der to og to sider er parallelle», kan definisjon b) skrives om til «en rombe er en firkant der to og to sider er parallelle og alle sidene er like lange». Det er overflødig å peke på at to og to sider er parallelle, ettersom det følger av at det er en firkant der sidene er like lange. Definisjon b) er derfor ikke en minimumsdefinisjon. Det er kun kvadratet som kan skrives som en minimumsdefinisjon ved bruk av andre referansepunkt enn firkant. Kvadratet kan nemlig defineres med både rektangel og rombe som referansepunkt, og likevel være minimumsdefinisjon.

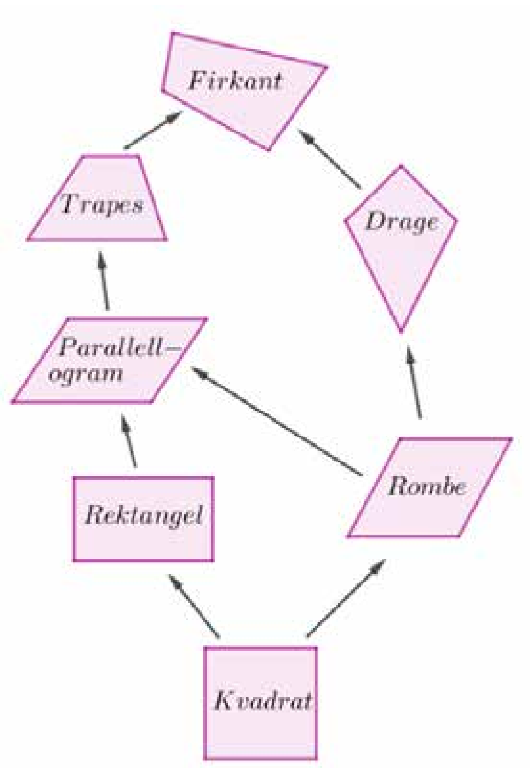
Det er også interessant å merke seg at LK06 ikke rettet samme oppmerksomhet mot minimumsdefinisjoner. Der ble ikke minimumsdefinisjoner nevnt, men formuleringer som *sortere*, *beskrive* og *analysere egenskaper ved todimensjonale figurer* var sentrale (Kunnskapsdepartementet, 2006, s. 62–63).

Inkluderende og ekskluderende definisjoner

En matematisk definisjon kan være inkluderende eller ekskluderende. La oss bruke et trapes som eksempel. De Villiers (1994) understreker at for å kunne ta stilling til om et trapes er definert inkluderende eller ekskluderende, må

Hovtun, G., Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 34–47.

www.caspar.no/tangenten



Figur 3

det presiseres om det er *minst* eller *nøyaktig* to parallelle sider:

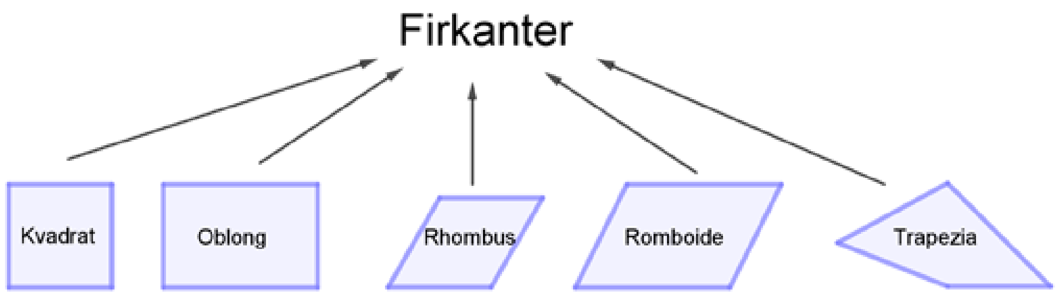
c) Et trapes er en firkant med *minst* to parallelle sider.
d) Et trapes er en firkant med *nøyaktig* to parallelle sider.

Definisjon c) er inkluderende. Det vil si at definisjonen inkluderer parallellogram, romber, rektangler og kvadrater. Dette medfører at vi kan gruppere firkanter i et hierarki (se figur 3), slik at figurer nede i hierarkiet blir spesialtilfeller av figurene over (de Villiers, 1994). Fordelene med en slik hierarkisk tilnærming er at figurene nede i hierarkiet deler egenskaper med figuren over. Det betyr for eksempel at dersom vi utleder en formel for arealet til et trapes, kan vi benytte denne formelen til både parallellogram, rektangel, rombe og kvadrat, uten å måtte utlede formelen til hver enkelt av figurene. I slike tilfeller vil det være hensiktsmessig å benytte seg av inkluderende definisjoner. Goldenberg et al. (2014) mener at å forstå anvendeligheten med inkluderende definisjoner er et mål i seg selv, og at det er viktig at elevene får erfare fordelene med den inkluderende klassifiseringen.

Definisjon d) er ekskluderende. Det medfører at parallellogram, rektangler, romber og kvadrat ikke blir definert som trapes, figurene blir sett på som uavhengige av hverandre. de Villiers (1994, 2010) omtaler dette som *partition classification*, eller *delt klassifisering*[2]. Euklid benyttet seg av denne typen klassifisering da han skrev det matematiske læreverket *Elementene* for ca. 2300 år siden (Joyce, 2021; Usiskin & Griffin, 2008). Euklids klassifisering kan illustreres som i Figur 4.

Her er en oblong alle rektangler som ikke er kvadrater, og så videre. Figurene blir sett på som uavhengige av hverandre.

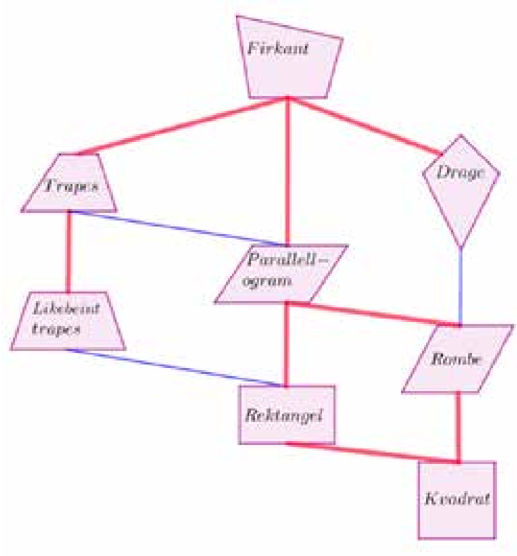
Selv om Euklid definerte firkanter ekskluderende, kan det se ut som at den moderne utviklingen av matematiske definisjoner går mot at



Figur 4

Hovtun, G., Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 34–47.

www.caspar.no/tangenten



Figur 5: Egen oversettelse av Usiskin & Griffin (2008, s. 18)

firkanter skal defineres inkluderende. Usiskin & Griffin (2008) viser for eksempel til Figur 5 som en oversikt over hvordan firkanter blir definert. Rødt linjestykke betyr at firkanten under stort sett alltid blir regnet som et spesialtilfelle av firkanten over. Blått linjestykke betyr at det er uenighet om hvorvidt firkanten under skal defineres som et spesialtilfelle av firkanten over. Selv om det er mange fordeler med å bruke inkluderende definisjoner, peker de Villiers (1994) på at ekskluderende definisjoner på firkanter lettere kan oppfylle Poincarés (1914) krav om at definisjonene skal være mulige å forstå for elevene. Det kan for eksempel være krevende for elever å forstå at et kvadrat også er et rektangel.

Denne problematikken har blitt tatt opp i van Hieles modell, en modell som blant annet har som mål å belyse hvorfor mange elever kan ha kognitive utfordringer i arbeid med geometri (Fuys et al., 1986; Usiskin, 1982). Modellen består av fem nivå for geometriforståelse, og her er det særlig interessant å merke seg skillet mellom nivå 2 og nivå 3 i modellen. Elever på nivå 2 i van Hieles modell kan identifisere Figur 6 som et kvadrat[3]. Elevene vil imidlertid ikke være med på at Figur 6 også er et rektangel,

Figur 6

selv om den tilfredsstiller alle kriteriene til et rektangel. Elevene må være på nivå 3 i modellen før de innser denne hierarkiske og inkluderende sammenhengen (Fuys et al., 1986, s. 249). Ifølge van Hieles modell kan vi med andre ord ikke ta det for gitt at alle elevene forstår inkluderende definisjoner på firkanter. I tillegg til disse nivåene presenterer van Hiele noen egenskaper ved dem (Usiskin, 1982), der det særlig er verdt å merke seg én egenskap: To personer som diskuterer geometri på forskjellige nivå, vil ikke kunne forstå hverandre, ifølge van Hiele. Dette innebærer at en elev på nivå 2 ikke forstår en forklaring som ligger på nivå 3. Knyttet til definisjoner på firkanter betyr det at dersom læreboka presenterer en definisjon som forutsetter at elevene er på nivå 3, er det mange elever på nivå 1 og nivå 2 som ikke har mulighet til å forstå denne definisjonen. Dette er med på å underbygge de Villiers' (1994) poeng om at ekskluderende definisjoner kan være mer tilgjengelige for noen elever.

Definisjoner på firkanter

For å svare på forskningsspørsmålet vårt om hvordan firkanter defineres i norske lærebøker, er vi avhengig av å avklare hva vi mener er fullgode matematiske definisjoner for de ulike firkantene. Det eksisterer ikke noen fasit på hva som er den ene rette definisjonen (Zazkis & Leikin, 2008), men ifølge Winicki-Landman og Leikins (2000) prinsipper for en god definisjon, skal den inneholde nødvendige og tilstrekkelige betingelser, samtidig som den inneholder så få betingelser som mulig. Videre virker det å gå mot en konsensus i det matematiske miljøet om at det bør brukes inkluderende definisjo-

Hovtun, G., Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 34–47.

Geometrisk form	Minimumsdefinisjon
Firkant	En firkant er en lukket figur i planet som består av fire punkter (tre punkt kan ikke ligge på samme linje) og fire rette linjestykker som knytter de fire punktene sammen.
Trapes	Et trapes er en firkant der minst to av sidene er parallelle.
Drage	En drage er en firkant der to og to nabosider har samme lengde.
Parallellogram	Et parallellogram er en firkant der to og to sider er parallelle.
Rombe	En rombe er en firkant der alle sider er like lange.
Rektangel	Et rektangel er en firkant der alle vinklene er 90 grader.
Kvadrat	Et kvadrat er en firkant der alle sidene er like lange, og alle vinklene er 90 grader.

Tabell 1

ner (Usiskin & Griffin, 2008). Basert på dette foreslår vi følgende kriterier for definisjoner på firkanter:

- Definisjonen inneholder nødvendige og tilstrekkelige betingelser.
- Definisjonen er inkluderende.
- Definisjonen er en minimumsdefinisjon.

På grunnlag av kriteriene har vi foreslått minimumsdefinisjonene på firkanter som vist i Tabell 1.

Metode

Vi har undersøkt og analysert definisjoner av firkanter i 24 lærebøker fra barne- og ungdomstrinnet.[4] Når det gjelder utvalg av lærebøker, brukte vi samme avgrensning som Kongelf (2015, s 83), nemlig de fysiske klassetrinnsspesifikke bøkene som elevene bruker til å tilegne seg kunnskap om matematikk i undervisningssituasjonen på skolen. Alle de 24 lærebøkene vi undersøkte, har vært knyttet til de to siste læreplanene. Åtte av lærebøkene er utgitt etter innføringen av LK20, og 16 av lærebøkene er knyttet til LK06. Vi noterte definisjonene på figurene trapes, parallellogram, rektangel, kvadrat, drage og rombe, og samlet resultatet i en tabell. Her ble bare definisjonene tatt med, eventuelle figurer og oppgaver ble utelatt. Vi noterte oss det imidlertid dersom læreboka inneholdt oppgaver eller figurer som kunne indikere om de hadde en inkluderende eller ekskluderende tilnærming.

Når det gjelder utvalg av lærebøker, tok vi utgangspunkt i de forskjellige forlagene vi har i Norge, og undersøkte om de hadde gitt ut lærebøker i matematikk. Vi tok utgangspunkt i læreplanene da vi valgte ut bøker. Under læreplanen LK06 var geometriske figurer en del av kompetansemålene etter 5.–7. trinn og 8.–10. trinn. I LK20 er geometriske figurer lagt til 6. og 9. trinn. Vi tok derfor utgangspunkt i lærebøkene til disse trinnene, og dersom vi ikke fant noen av definisjonene, undersøkte vi også lærebøkene på trinnet under og over.

Siden det allerede eksisterer teorier om definisjoner på firkanter i lærebøker (se for eksempel Usiskin & Griffin, 2008), og fordi det eksisterer teorier om definisjoner (se for eksempel Winicki-Landman & Leikin, 2000; Zazkis & Leikin, 2008), valgte vi å gjennomføre en teoridrevet innholdsanalyse (Hsieh & Shannon, 2005), der vi blant annet tok utgangspunkt i Zazkis og Leikins (2008) rammeverk for analyse av matematikklærerstudenters definisjoner på kvadrater. Innholdsanalysen besto av to nivå. På det første nivået kartla vi hvilke lærebøker definisjonene var fra, hvilken læreplanperiode læreboka var fra, og hvilke figurer som ble definert. På det andre nivået undersøkte vi om definisjonene inneholdt nødvendige og tilstrekkelige betingelser, om de var inkluderende eller

Hovtun, G., Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 34–47.

www.caspar.no/tangenten

Nødvendige og tilstrekkelige betingelser	Inkluderende / ekskluderende	Type definisjon
NT: Nødvendige og tilstrekkelige betingelser for figuren. T: Tilstrekkelige betingelser, men også ikke nødvendige betingelser. N: Nødvendige betingelser, men ikke tilstrekkelige. F: Inneholder verken nødvendige eller tilstrekkelige betingelser	ID: Inkluderende definisjoner. TID: Tilsynelatende inkluderende definisjoner. ED: Ekskluderende definisjoner. TD: Tvetydige definisjoner.	M: Minimumsdefinisjon IM: Ikke minimumsdefinisjon

Tabell 2: Analyseverktøyet som ble benyttet.

ekskluderende, og om de var minimumsdefinisjoner (se Tabell 2).

Det første vi så på da vi kodet på nivå 2, var om den gitte definisjonen inneholdt nødvendige og tilstrekkelige betingelser. En definisjon ble kodet som NT dersom den var korrekt, T, N eller F dersom definisjonen inneholdt mangler. Da vi skulle kode om en definisjon var inkluderende eller ekskluderende, ble koden inkluderende definisjon (ID) brukt dersom læreboka brukte tidligere figur i hierarkiet som referansepunkt. Koden tilsynelatende inkluderende (TID) ble brukt dersom definisjonen var NT eller N, men ikke brukte tidligere figur som referansepunkt. En definisjon kodet som ekskluderende (ED) ble i alle tilfeller kodet som T eller F, da den ville inneholde unødvendige betingelser som utelukket enkelte figurer. Enkelte definisjoner var derimot mindre klare når det gjaldt om de var inkluderende eller ekskluderende, hvilket tilordnet dem i kodekategorien tvetydige definisjoner (TD). Når det gjaldt type definisjon, vurderte vi kun hvorvidt det var eller ikke var en minimumsdefinisjon. For å bli kodet som en minimumsdefinisjon måtte definisjonen inneholde nødvendige og tilstrekkelige betingelser,

Definisjon	Nødvendige og tilstrekkelige betingelser	Inkluderende/ ekskluderende	Type definisjon
e) En firkant der to sider er parallelle, og de to andre sidene ikke er parallelle, kalles et trapes.	T	ED	IM
f) Et parallellogram har to og to sidekanter som er like lange og parallelle. Motstående vinkler er like store.	N	TID	IM
g) I en rombe er alle sidene like lange. Motstående vinkler er like store, og vinklene er ikke 90°.	F	ED	IM
h) Et kvadrat er en rombe med rette vinkler.	NT	ID	M

Tabell 3: Koding i analyseverktøyet.

Hovtun, G., Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 34–47.

www.caspar.no/tangenten

	Antall definisjoner	Prosent
LK20:	42 av 48	88 %
LK06:	64 av 96	67 %
Totalt:	**106 av 144**	**74 %**

Tabell 4

	Kvadrat	Rektangel	Parallellogram	Rombe	Trapes	Drage
Antall definisjoner (av 24 mulige)	22	22	22	19	18	3

Tabell 5

og ikke noen overflødig informasjon. Eksempel på hvordan vi kodet i analyseverktøyet, kan sees i Tabell 3.

Definisjon e) inneholder tilstrekkelige, men ikke nødvendige betingelser (T). Definisjonen vil kun omfavne trapes, men ekskluderer spesialtilfeller av trapes (ED), for eksempel parallellogram og rektangel. Det kan argumenteres for at en slik ekskluderende definisjon er riktig, men ut ifra vår tolkning av betingelser på definisjoner må definisjonen være inkluderende for å bli betegnet som korrekt. Definisjon f) har noen nødvendige betingelser som gjør at alle parallellogram vil bli dekket av definisjonen (også spesialtilfeller, derfor TID), men den mangler én betingelse for å kun gjelde for parallellogrammer – det må være en firkant. Dersom det ikke presiseres, vil definisjonen også gjelde for alle regulære mangekanter med par antall sider. Definisjon g) inneholder verken tilstrekkelige eller nødvendige betingelser (F). Den mangler betingelsen firkant, og ekskluderer (ED) samtidig de spesialtilfellene av romber som vi kaller kvadrat. Definisjon h) inneholder både nødvendige og tilstrekkelige betingelser. Definisjonen bruker rombe som referansepunkt, og er dermed inkluderende, uten at den tillegger unødvendige betingelser. Definisjonen er dermed en minimumsdefinisjon, gitt at definisjonen av rombe er en minimumsdefinisjon.

Da analyseverktøyet var ferdig utviklet, ble definisjonene først kodet individuelt, før vi i fellesskap tok en endelig koding og diskusjon på eventuelle avvik. Analyseprogrammet NVivo ble brukt til å skaffe en kvantitativ oversikt over dataene, og videre foretok vi en kvalitativ analyse av definisjonene til et læreverk der dataene skilte seg ut.

Resultater og diskusjon

Antall definisjoner

Vi tok utgangspunkt i definisjoner av 6 typer firkanter fra 24 lærebøker, noe som utgjorde $24 \cdot 6 = 120$ mulige definisjoner. En oversikt over faktisk antall definisjoner er gitt i Tabell 4.

Her ser vi at det bare er 74 % av de 144 figurene som er definert. Det betyr med andre ord at hver fjerde definisjon mangler. En oversikt over antall definisjoner pr. figur gir også interessant informasjon:

I Tabell 5 ser vi at drage skiller seg tydelig ut. Bare 3 av 24 lærebøker definerer denne figuren. Tar vi bort drage, ser vi at 103 av 120, altså 86 % av de resterende figurene, blir definert.

Videre kan det være verdt å merke seg at 6 av 24 lærebøker også lar være å definere trapes, og at det prosentvis er definert flere firkanter i lærebøker etter LK20 enn etter LK06.

Vi synes det er særlig interessant at bare 3 av 24 lærebøker definerer dragen. Lærebøkene er i stor grad med på å påvirke norske læreres undervisning (Alseth et al., 2003; Kongelf, 2015; Mullis et al., 2012; Johansson, 2017), noe som kan bety at dersom lærebøkene neglisjerer

Hovtun, G., Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 34–47.

www.caspar.no/tangenten

	Tilstrekkelige og nødvendige betingelser (NT)	Tilstrekkelige, men ikke nødvendige betingelser (T)	Nødvendige, men ikke tilstrekkelige betingelser (N)	Verken tilstrekkelige eller nødvendige betingelser (F)
LK20	35	1	5	1
LK06	45	3	13	3
Totalt:	**80** (75 %)	**4** (4 %)	**18** (17 %)	**4** (4 %)

Tabell 6

	Minimumsdefinisjon	Ikke minimumsdefinisjon
LK20	22	20
LK06	22	42
Totalt:	**44** (42 %)	**62** (58 %)

Tabell 7

dragen, vil den også bli forbigått av lærerne. Vi vet ikke om det å utelate dragen er et bevisst valg av lærebokforfatterne, men vi etterlyser i så fall en diskusjon rundt dette. Blant argumentene for å beholde dragen i lærebøkene er figurens naturlige plass i firkantenes hierarki, at dragens egenskaper kan benyttes under konstruksjoner, og ikke minst at det er positive elevaktiviteter tilknyttet dragens egenskaper dersom elevene skal lage en fysisk drage.

Nødvendige og tilstrekkelige betingelser

Vi undersøkte også hvor mange av de 106 definisjonene som var korrekte. Resultatet kan oppsummeres i Tabell 6.

80 definisjoner, eller 75 % av definisjonene vi fant, er korrekte definisjoner. Det betyr også at av 144 mulige definisjoner blir bare 80 definert korrekt, noe som tilsvarer 56 %. Ser vi bort fra dragen, er 80 av 120 mulige definisjoner riktig definert, noe som utgjør 67 %.

Når 75 % av de 106 faktiske definisjonene er korrekte, betyr det at hver fjerde definisjon oppgitt i lærebøkene er mangelfull. Her er det verdt å merke seg at 18 av de 26 mangelfulle definisjonene ikke inneholder tilstrekkelige betingelser, altså at definisjonene også omfavner elementer vi ikke ønsker å definere. Ifølge Zazkis & Leikin (2008) er dette en vanlig feil knyttet til definisjoner av firkanter. I de fleste tilfellene der det ikke er tilstrekkelige betingelser, presiserer ikke definisjonen at det er snakk om en firkant, for eksempel «alle vinkler er 90 grader» som en definisjon på rektangel. Til lærebøkenes forsvar må det nevnes at flere av dem har begrepet *Firkanter* som en tittel eller overskrift, så det er underforstått at definisjonen snakker om firkanter.

Minimumsdefinisjoner

Når det gjelder minimumsdefinisjoner, kan resultatet oppsummeres i Tabell 7.

Totalt sett er 42 % av definisjonene minimumsdefinisjoner. Ser vi på læreplanperiodene hver for seg, er 52 % av definisjonene fra lærebøker etter LK20 minimumsdefinisjoner, og 34 % av definisjonene fra LK06 er minimumsdefinisjoner.

Når vi ser på figurene hver for seg, skiller romben seg ut. Her er bare 3 av 19 definisjoner minimumsdefinisjoner. Det utgjør ca. 16 %.

Her er det interessant å se at det er et såpass stort skille mellom prosentvis andel minimumsdefinisjoner i lærebøker etter LK06 og LK20. En medvirkende årsak til dette er sannsynligvis at LK20 eksplisitt har med begrepet *minimumsdefinisjoner* i kompetansemålene, noe LK06 ikke har. Som vist i teoridelen kan det være utfordrende å lage definisjoner som er tydelig inklu-

Hovtun, G., Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 34–47.

www.caspar.no/tangenten

	Inkluderende	Tilsynelatende inkluderende	Ekskluderende	Tvetydig
LK20:	14	20	2	7
LK06:	25	21	7	11
Totalt:	**39**	**41**	**9**	**17**

Tabell 8

	Kvadrat	Rektangel	Parallellogram	Rombe	Trapes
Matematikk 6	NT, TID, M	NT, TID, IM	NT, TID, IM	-	NT, TD, M
Matematikk 9	NT, ID, IM	N, TID, IM	F, ED, IM	NT, ID, IM	T, ED, IM

Tabell 9

derende samtidig som de er minimumsdefinisjoner. Dette gjelder særlig for romber, der de fleste definisjonene i lærebøkene var av typen:

a) En rombe er en firkant der alle sidene er like lange.
b) En rombe er et parallellogram der alle sidene er like lange.

Som tidligere nevnt inneholder begge definisjonene nødvendige og tilstrekkelige betingelser, men det er bare a) som er en minimumsdefinisjon, siden det i b) ikke er nødvendig å presisere at det er et parallellogram. Dette eksempelet illustrerer et didaktisk problem for lærebokforfatterne. Forfatterne ønsker å følge læreplanen, og dermed presentere minimumsdefinisjoner, som for eksempel definisjon a). Samtidig ønsker de å hjelpe elevene til å forstå den hierarkiske og inkluderende klassifiseringen av firkanter. Da kan det forsvares å velge den tydelig inkluderende b), som kanskje gjør det lettere for elevene å forstå at en rombe også er et parallellogram.

Det er også mulig å argumentere for det motsatte, nemlig at definisjon b) er vanskeligere for elever å forstå. Van Hiele (Fuys et al., 1986) peker på at det først er på nivå 3 at elevene er i stand til å forstå den hierarkiske og inkluderende klassifiseringen av firkanter. Elevene kan heller ikke forstå en forklaring som ligger på et høyere nivå i modellen enn det de er på selv. Dersom elevene selv er på nivå 2, kan det derfor argumenteres for at definisjon b) er umulig å forstå for dem, siden det er en definisjon som forutsetter at elevene er på nivå 3.

Inkluderende eller ekskluderende definisjoner

En oversikt over om definisjonene er inkluderende eller ekskluderende, er gitt i Tabell 8.

Av de 106 definisjonene er 80 kodet som inkluderende eller tilsynelatende inkluderende. Det utgjør ca. 75 % av definisjonene. Definisjonene som ble kodet inkluderende, brukte en tidligere figur i hierarkiet i definisjonene sine, og dette medførte igjen at de færreste av disse var minimumsdefinisjoner.

Blant de tvetydige definisjonene finner vi 11 definisjoner på trapes. Det innebærer at 11 av 18 lærebøker ikke tar tydelig stilling til om et trapes skal ha *nøyaktig* eller *minst* to parallelle sider. Dette resultatet er med på å styrke mistanken fra innledningen om at det ikke er noen konsensus om hvordan trapeset skal defineres.

En kvantitativ analyse av datamaterialet viser med andre ord at de fleste norske lærebøker tilsynelatende har en inkluderende tilnærming til de fleste firkantene, selv om ikke alle tar tydelig stilling til trapeset. Knyttet opp til Usiskin og Griffins (2008) oversikt over hierarki for firkanter er dette er forventet resultat. Vi fant imidlertid ni ekskluderende definisjoner, der seks av disse er fra lærebøker fra Cappelen Damm. For

Hovtun, G., Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 34–47.

www.caspar.no/tangenten

Figur	Definisjon i Matematikk 9 fra Cappelen Damm
Kvadrat	Et kvadrat er et rektangel der alle sidene er like lange. Det vil si at grunnlinjen og høyden i kvadratet er like lange. Sidene kaller vi s.
Rektangel	I et rektangel er alle vinklene 90°, og de motstående sidene er like lange og parallelle.
Parallellogram	I et parallellogram er to og to sider like lange og parallelle. Motstående vinkler er like store, og de er *ikke* 90°.
Rombe	En rombe er et parallellogram der sidene er like lange.
Trapes	Et trapes er en firkant der bare to av sidene er parallelle. I trapeset er sidene a og b parallelle. Høyden h er avstanden mellom de to parallelle sidene. Høyden står alltid vinkelrett på de parallelle sidene a og b.

Tabell 10: Alle definisjoner er sitert direkte fra Matematikk 9. (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 94; s. 100; s. 104; s. 107; s. 108)

å kunne belyse bruken av ekskluderende definisjoner i større grad foretok vi en kvalitativ analyse av læreverkene Matematikk 6 (Gulbrandsen et al., 2020) og Matematikk 9 (Hjardar & Pedersen, 2020) fra Cappelen Damm.

Bruken av ekskluderende definisjoner

I de to læreverkene ble definisjonene av firkantene kodet som vist i Tabell 9.

I Matematikk 6 blir det brukt en tilsynelatende inkluderende definisjon om både kvadratet, rektangelet og parallellogrammet. Definisjonene henviser til firkantenes egenskaper, uten at de ekskluderer spesialtilfeller. Kvadrat og rektangel blir presentert samtidig, der kvadratet blir omtalt som et rektangel i en tekst som står under definisjonene. I tillegg til dette har boka en klassifiseringsoppgave der elevene skal gi navn til forskjellige firkanter. Her presiserer lærerveiledningen at noen av figurene kan ha flere navn. Det er med andre ord en tydelig inkluderende tilnærming i Matematikk 6.

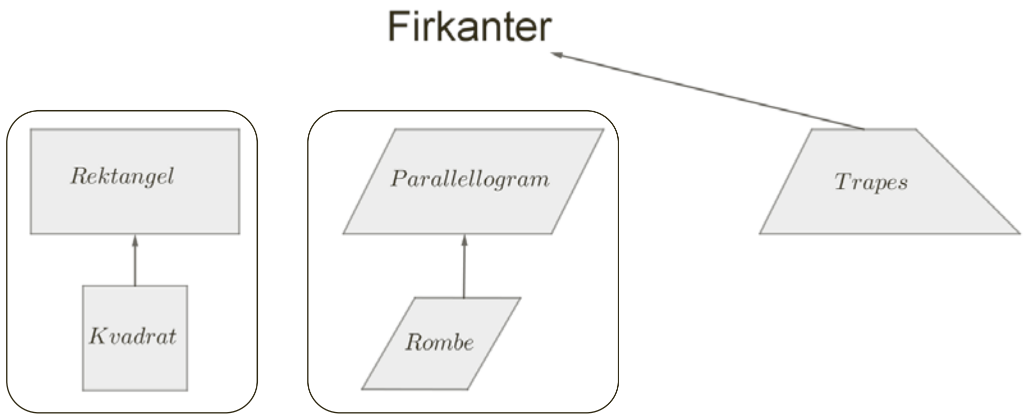
I Matematikk 9 blir det brukt en inkluderende definisjon på kvadratet og romben, en tilsynelatende inkluderende definisjon på rektangelet og en ekskluderende definisjon på parallellogram og trapes, som vist i Tabell 10.

Kvadratet blir definert som et spesialtilfelle av rektangelet, og romben blir definert som et spesialtilfelle av parallellogrammet. En tydelig inkluderende tilnærming. Videre ekskluderer de enhver mulighet for kobling på tvers av disse gruppene, samt koblingen til trapes. I stedet for en hierarkisk oppbygging har de gruppert kvadrater og rektangler, romber og parallellogram, og trapes for seg selv. Matematikk 9s inndeling av firkanter er en plass mellom hierarkisk inndeling og delt klassifisering (de Villiers, 1994), og er forsøkt illustrert i Figur 7.

Det er også verdt å merke seg at definisjonene til rektangel og parallellogram ikke inneholder tilstrekkelige betingelser, de presiserer ikke at det er snakk om firkanter. Dette innebærer at både kvadratet og romben bygger definisjonen sin på figurer som er mangelfullt definert. Det kan da settes spørsmålstegn ved om disse definisjonene er korrekte, selv om definisjonen til kvadrat og rombe isolert sett inneholder både nødvendige og tilstrekkelige betingelser. Matematikk 9s definisjoner har både inkluderende og ekskluderende tilnærming, i tillegg til at flere av dem er mangelfulle. Dette er problematisk på flere områder. For det første får ikke elevene mulighet til å oppdage kraften bak en inkluderende tilnærming (Goldenberg et al., 2014). For det andre begrenser det elevenes muligheter til å strekke seg mot nivå 3 i van Hieles modell (Fuys et al., 1986), og for det tredje kan feil i lærebøker

Hovtun, G., Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 34–47.

www.caspar.no/tangenten



Figur 7

være med på å skape misoppfatninger hos elevene (Kongelf, 2015).

Dersom vi sammenligner Matematikk 6 og Matematikk 9, kan det se ut som det et behov for en felles forståelse for hvordan vi definerer firkanter. Ikke bare på tvers av læreverk, men også innad i samme læreverk. Det vil være forvirrende for elevene når de i sjette klasse lærer at et rektangel også er et parallellogram, for så å møte en definisjon i niende klasse der det understrekes at dette ikke er tilfellet. En dyktig lærer kan likevel benytte seg av den tidvis forvirrende definisjonsbruken i lærebøkene til å legge til rette for både diskusjon og læring hos elevene. Dette stiller imidlertid krav til at læreren selv har identifisert at lærebøkene kan ha upresise definisjoner.

Konklusjon og implikasjoner

Med bakgrunn i en kvantitativ analyse av hele datamaterialet og en kvalitativ analyse av deler av det vil vi peke på følgende funn:

Av alle de mulige definisjonene på firkanter i lærebøkene blir 74 % definert. Dragen er en firkant som blir definert i bare 3 av 24 lærebøker.

Hver fjerde definisjon i lærebøkene er mangelfull. De fleste av disse definisjonene mangler tilstrekkelige betingelser.

42 % av definisjonene er kodet som minimumsdefinisjoner. Her er det verdt å merke seg to ting. For det første er det prosentmessig flere minimumsdefinisjoner i lærebøker etter LK20. For det andre kan det se ut til at det er vanskelig å lage en minimumsdefinisjon samtidig som den er tydelig inkluderende.

De fleste lærebøker definerer firkanter inkluderende. Mange lærebøker tar imidlertid ikke stilling til om trapeset skal defineres inkluderende eller ekskluderende.

Det eksisterer store forskjeller på hvordan firkanter defineres både på tvers av læreverk og innenfor ett og samme læreverk.

Summen av disse funnene forteller oss at norske læreverk ikke har tatt et tydelig standpunkt til hvilke firkanter som skal defineres, og hvordan de skal defineres, og at det dermed ikke finnes en felles forståelse på tvers av læreverkene. Spesielt trapeset virker ubestemmelig i norske lærebøker. Det er nok for mye å håpe på at alle læreverkene får en felles forståelse for hvordan firkanter skal defineres, men definisjonene må være korrekte, og det bør i det minste være en konsensus om hvordan de defineres innenfor ett og samme læreverk.

Etter å ha analysert definisjonene fra lærebøkene forstår vi at den manglende konsensusen

Hovtun, G., Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 34–47.

www.caspar.no/tangenten

til definisjoner av firkanter kan gjøre det utfordrende for lærere å legge til rette for undervisning som er med på å bygge opp elevenes geometriforståelse knyttet til firkanter. En implikasjon av denne forskningen er at det er et behov for en felles forståelse for hvordan vi definerer firkanter i norske matematikklærebøker.

Når det gjelder videre forskning, hadde det vært interessant å undersøke bruken av definisjoner knyttet til andre områder enn firkanter. Ligger det en klar og korrekt matematisk tanke bak de andre definisjonene vi finner i lærebøkene? Det ville også vært interessant å undersøke hvordan lærere benytter seg av definisjonene i lærebøkene, og hva lærebøkene har å si for utviklingen av elevenes geometriforståelse.

På Jæren vil man fremdeles kunne gå til grønnsakhandleren og be om epler, men som med matematiske definisjoner vil man gjøre lurt i å presisere hva slags epler man ønsker seg.

Noter

1 På disse firkantene gjelder følgende: Vinkler som ser rette ut, er rette, sider som ser like lange ut, er like lange, og sider som ser parallelle ut, er parallelle.

2 Vår oversettelse.

3 Gitt at alle vinkler er rette og alle sider er like lange.

4 Læreverkene som ble analysert, er: Matemagisk 8–10, Matemagisk 1–7, Matematikk 8–10, Matematikk 1–7 (fra Cappelen Damm), Matematikk 1–7 (fra Barentsforlaget), Volum 1–7, Multi 1–7 og Maximum 8–10, som er revidert etter LK20, og Sirkel 8–10, Tetra 8–10, KodeX 8–10, Nye Mega 8–10, Radius 1–7, Abakus 1–7, Matemagisk 1–7, Matte overalt 1–7, Maximum 8–10, Multi 1–7, Faktor 8–10, Nummer 8–10, Nummer 8–10 (parallellbok), Tusen millioner 1–7, Grunntall 8–10 og Kasparia 1–7, som er revidert etter LK06.

Referanser

Alseth, B., Breiteig, T. & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering – matematikkfaget som kasus*. (02/2003). Telemarksforskning-Notodden.

Bolstad, O. H. (2020). *Teaching and learning for mathematical literacy* [Doktorgradsavhandling]. Universitetet i Agder.

de Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics, 14*(1), 11–18.

de Villiers, M. (2010, 30. juni–2. juli). *Some Reflections on the Van Hiele theory* [Paperpresentasjon]. Congress of teachers of mathematics, Zagreb.

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1984). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. City University of New York.

Goldenberg, E. P., Clements, D. H., Dougherty, B. J. & Zbiek, R. M. (2014). *Developing essential understanding of geometry and measurement*. National council of teachers of mathematics.

Gulbrandsen, J. E., Løchsen, R., Måleng, K. & Olsen, V. S. (2020). *Matematikk 6*. Cappelen Damm.

Hjardar, E. & Pedersen, J. E. (2021). *Matematikk 9*. Cappelen Damm.

Hsieh, H.-F. & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research, 15*(9), 1277–1288.

Johansson, M. (2017). Textbooks as instruments – Three teachers' way to organize their mathematics lessons. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences* (s. 315–340). Cappelen Damm Akademisk.

Joyce, D. E. (2021, 26. oktober). *Euclid's elements*. https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/elements.html

Kongelf, T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3–4), 83–109.

Kontorovich, I. & Zazkis, R. (2017). Mathematical conventions: Revisiting arbitrary and necessary. *For the learning of mathematics, 37*(1), 29–34.

Kunnskapsdepartementet (2006). *Læreplan i matematikk*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet. Midlertidig utgave juni 2006.

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Hovtun, G., Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 34–47.

www.caspar.no/tangenten

Matematikk.org (2023, 30. juni). *Et trapes*. https://www.matematikk.org/artikkel.html?tid=154025&within_tid=154319

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International results in mathematics.* TIMSS & PIRLS International Study Center.

Poincaré, H. (1914). *Science and method*. Cosimo classics.

Romanov, E., Popova, A. S., Leonov, G. N. & Degtereva, R. V. (2003). МАТЕМАТИКАот А до Я [Matematikk fra A til Å]. Altai State Technical University I. I. Polzunova.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and achievement in secondary school geometry*. The University of Chicago.

Usiskin, Z. & Griffin, J. (2008). *The classification of quadrilaterals – A study of definition*. Information age publishing.

Weinstein, E. (2023, 30. juni). *Trapezoid*. https://mathworld.wolfram.com/Trapezoid.html

Winicki-Landman, G. & Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent Definitions: Part 1. *For the learning of mathematics, 20*(1), 17–21.

Zaslavsky, O. & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for research in mathematics education, 36*(4), 317–346.

Zazkis, R. & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational studies in mathematics, 69*, 131–148.

Hovtun, G., Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(1), 34–47.

www.caspar.no/tangenten