Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

Torkildsen

Ei eske med ti klosser

Problem

Dette problemet er inspirert av Burton (1986). Ei eske med ti lekeklosser inneholder:

En terning (kloss) med sidekant 1 cm, en terning med sidekant 2 cm, en med sidekant 3 cm, en med sidekant 4 cm osv. opp til den største med sidekant 10 cm. Barnet som eier klossene, forsøker å bygge to tårn som er like høye. (I et tårn står alle klossene oppå hverandre, ingen ved siden av hverandre.) Kan barnet klare dette når det vil bruke alle terningene (klossene)? Vis hvordan, eller forklar hvorfor dette ikke kan gjøres.

Hvis vi fjerner den største klossen, terningen med sidekant 10 cm, hva blir da svaret på problemet med å bygge to like høye tårn?

Hva om vi også fjerner terningen med sidekant 9 cm?

Hvordan går «byggingen av to like høye tårn» dersom det i tillegg til de opprinnelige 10 terningene kommer en med sidekant 11 cm?

Undersøk dette problemet for andre tall og se om dere kan finne en regel / et mønster. Bruk regelen/mønsteret til å svare på spørsmålet om det er mulig å bygge to like høye tårn dersom vi har ei eske med 20 ulike terninger i alle størrelser fra og med 1 til og med 20. Klarer dere å grunngi at regelen dere har funnet, er rett?

Ole Einar Torkildsen
Høgskulen i Volda
oet@hivolda.no

Ole Einar Torkildsen har i hele Tangentens historie bidratt med oppgaver til bladet, i tillegg til å være redaksjonsmedlem, redaktør og nå medlem av redaksjonsrådet. Denne teksten er opptrykk fra Tangenten nr. 3/4 i 1993. Oppgaven her kan gis på alle klassetrinn i grunnskolen. Torkildsen viser leseren mulige måter å stimulere elevene på når de arbeider med problemet.

Oppgaven kan naturlig utvides i minst to retninger:

Hvis vi kan bygge to like høye tårn når vi har 11 ulike terninger, finnes det flest mulig måter å gjøre dette på?

Samme problemstilling som ovenfor, men nå skal det bygges tre like høye tårn, fire like høye tårn, fem like høye tårn.

Forslag til løsninger

Det virker naturlig å summere de naturlige tallene fra og med 1 til og med 10, eller generelt til og med n, for å se om denne summen er et partall eller et oddetall (avgjøre pariteten til summen). Dette betyr at vi undersøker pariteten til

(1) $$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

Torkildsen, O. E. (2023). Ei eske med to klosser. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 34*(3), 43.

www.caspar.no/tangenten

Hvis T_n er et oddetall, er det opplagt umulig å bygge to like høye tårn. En nødvendig betingelse for å bygge to like høye tårn er derfor at T_n er et partall. Det virker rimelig at dette også er en tilstrekkelig betingelse, dvs. at vi kan bygge to like høye tårn hvis T_n er et partall. Dette er da også tilfellet.

Elevene finner dette helt opplagt, men det krever egentlig et (lite) bevis. Vårt opprinnelige problem er dermed overført til følgende:

Bestem de n-verdiene som fører til at T_n er et partall.

Tallene T_n kalles trekanttall[1]. I det følgende betyr tall et naturlig tall.

Når vi tar utgangspunkt i pariteten til T_n, har vi i hvert fall fire mulige angrepsvinkler:

- bruk av forskjeller[2]
- bruk av tabell (systematikk)
- finne antall oddetall i summen $1 + 2 + 3 + \ldots + n$
- finne en formel for T_n og studere denne

Bruk av forskjeller

Bygg to vilkårlige tårn av alle klossene og finn forskjellen mellom høydene til de to tårnene. Hvis forskjellen er et oddetall, kan vi ikke bygge to like høye tårn. Er forskjellen et partall, kan vi bygge to like høye tårn. At dette er rett, kan innses slik:

Del tallene inn i to mengder. F.eks. slik:

I: $a_1, a_2, \ldots, a_r$ der $a_1 + a_1 + \ldots + a_r = S_1$

II: $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_n$ der $a_{r+1} + a_{r+2} + \ldots a_n = S_2$

der alle a-ene er ulike.

Vi har da at $S_1 + S_2 = T_n$.

La $S_1 \geq S_2$ og sett $d = S_1 - S_2$ eller $S_1 = S_2 + d$. Vi får dermed at $T_n = 2S_2 + d$. Som viser at T_n har samme paritet som d, og påstanden over er vist.

Det er klart at dette ikke er en særlig egnet metode hvis mange tall skal summeres, altså når n er stor. På den annen side kan metoden utføres direkte på klossene, og kan det f.eks. bygges to tårn med høydeforskjell 1 enhet, sier resultatet over at det ikke kan bygges to like høye tårn. Er høydeforskjellen 2, kan tvillingtårnene bygges. Hvordan kan vi vise det?

Oppgaven kan dermed løses uten å utføre formelle addisjoner, det er nok å sammenligne de to høydene.

Bruk av tabell

Lag en tabell over de første trekanttallene (Tabell 1). Hvis metoden med forskjeller brukes, er det nok å ta med første og siste linje i tabellen.

n	T_n	Paritet T_n	Mulig
1	1	Odde	Nei
2	3	Odde	Nei
3	6	Par	Ja
4	10	Par	Ja
5	15	Odde	Nei
6	21	Odde	Nei
7	28	Par	Ja
8	36	Par	Ja
9	45	Odde	Nei
10	55	Odde	Nei

Tabell 1

Mønsteret som trer fram i siste linje, ser ut til å repetere sekvensen (odde, odde, par, par) syklisk/periodisk. Vi legger merke til at periodelengden til sekvensen er 4. Dette er også rett, og kan innses slik:

Tallene T_n kan også beskrives ved

(2) $T_1 = 1$ og $T_n = T_{n-1} + n$ når $n > 1$

Nå er annethvert naturlig tall et partall og tilsvarende for oddetall. Brukes dette sammen med (2), ser vi

$T_1 = 1$, odde
$T_2 = T_1 + 2$, odde + par = odde
$T_3 = T_2 + 3$, odde + odde = par
$T_4 = T_3 + 4$, par + par = par
$T_5 = T_4 + 5$, par + odde = odde
$T_6 = T_5 + 6$, odde + par = odde

Torkildsen, O. E. (2023). Ei eske med to klosser. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 34*(3), 43.

som viser at paritetsuttrykkene for T_2 og T_6 er identiske. Dette bekrefter par/odde-mønsteret, og periodelengden er 4.

En konsekvens av dette er at annethvert partall og annethvert oddetall (n-verdier) gjør at T_n blir et partall. Dette betyr igjen at differansen mellom to oddetall som gjør at T_n blir et partall, er et multiplum av 4. Tilsvarende for partallene. Det første oddetallet som oppfyller kravet, er $n = 3$, tilsvarende partall er 4.

Dette gir at alle oddetall på form $3 + 4k$, som vanligvis skrives[3] $4k + 3$ eventuelt 4k – 1, gjør at T_n er et partall.

De partallene som fører til T_n er et partall, er n-verdiene på form $4 + 4k$, dvs. tallene i 4-gangen, som vanligvis betegnes $4k$.

Konklusjonen blir dermed

(3) Når $n = 4k + 3$ eller $n = 4k$ er T_n et partall, og når $n = 4k + 1$ eller $n = 4k + 2$ er T_n et oddetall

Antall oddetall i summen 1 + 2 + 3 + … + n

Pariteten til en sum av hele tall bestemmes av antall oddetall som inngår i summen. Et partall antall oddetall gir at svaret er et partall, mens et odde antall oddetall gir at svaret er et oddetall.

Dette betyr at hvis vi kan bestemme pariteten til antall oddetall i $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, vet vi pariteten til T_n.

Vi deler inn i to hovedtilfeller, alt etter som n er partall eller oddetall.

***n* partall:**
Blant tallene er antall oddetall likt med antall partall. Setter vi $n = 2m$ er dette antallet m. Pariteten til T_n er dermed lik pariteten til m. Dette gir:

- Når m er partall, dvs. $m = 2k$, så er T_n partall og $n = 4k$
- Når m er oddetall, $m = 2k + 1$, så er T_n oddetall og $n = 4k + 2$.

***n* oddetall:**
Antall oddetall blant 1, 2, 3, …, n er én mer enn antall partall. Settes $n = 2m + 1$, er dette antallet $m + 1$. Pariteten til T_n er dermed motsatt av pariteten til m. Vi har

- m partall, $m = 2k$, gir at er T_n oddetall og $n = 4k + 1$.
- m oddetall, $m = 2k + 1$, gir T_n partall og $n = 4k + 3$.

Vi har fått setning (3).

Formel for T_n

Trekanttallene T_n er gitt ved

$$(4) \quad T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Som nevnt innledningsvis søker vi trekanttall som er partall, og sammen med (4) gir det

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2k$$

Nå er n og $n + 1$ to nabotall, følgelig er nøyaktig ett av dem partall. Dette betyr at skal oppgaven være mulig, må 4 dele enten n eller $n + 1$, som gir at $n = 4k$ eller $n + 1 = 4k$, dvs. $n = 4k$ eller $n = 4k - 1$. Vi har fått setning (3).

Alternativ måte

Det er naturlig å reise spørsmålet:

Er det mulig å løse problemet uten å gå veien om pariteten til T_n?

Svaret på dette er ja, og det kan vises slik:

Tallene $n, n - 1, n - 2, \ldots, 3, 2, 1$ deles så langt som det går, inn i grupper på 4 og 4, start med n. La antall slike grupper være k.

Første gruppe består av n, $n - 1$, $n - 2$ og $n - 3$. Vi observerer at

$$n + (n - 3) = (n - 1) + (n - 2),$$

Torkildsen, O. E. (2023). Ei eske med to klosser. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 34*(3), 43.

og dette betyr at summen av det største og minste tallet er lik summen av de to midterste tallene. Tenker vi i klosser og tårn, betyr det at vi med disse fire klossene kan bygge to tårn som er like høye.

Andre gruppe består av tallene $n-4$, $n-5$, $n-6$ og $n-7$. Her er

$$(n-4)+(n-7)=(n-5)+(n-6),$$

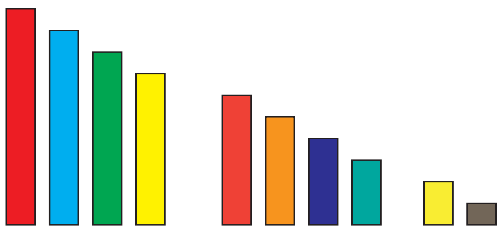
som betyr at vi også her kan lage to tvillingtårn med samme høyde. Hvert av tvillingtårnene settes sammen med ett av tårnene fra første gruppe. Fra dette får vi igjen ut to like høye tårn. Slik fortsetter vi til alle k-gruppene med fire tall er behandlet. Når dette er gjort, gjenstår fire muligheter:

i) Alle tallene er brukt
ii) Ett tall igjen, tallet 1
iii) To tall igjen, tallene 1 og 2
iv) Tre tall igjen, tallene 1, 2 og 3

i) Betyr at vi har to summer som er like store, dvs. to like høye tårn. Her er n et tall i 4-gangen, vi kan skrive $n = 4k$.
ii) Betyr at vi har to summer som er like store og står til rest med å addere 1. Det vil da være umulig å opprettholde likheten siden vi kan lage to tårn med høydeforskjell 1 (se avsnittet "Bruk av forskjeller"), dvs. umulig å bygge to like høye tårn. Her er n én mer enn et tall i 4-gangen, $n = 4k + 1$.
iii) Betyr at vi har to summer som er like store og står til rest med å addere 1 og 2. Igjen vil det være umulig å opprettholde likheten, dvs. umulig å bygge to like høye tårn. Her er n to mer enn et tall i 4-gangen, $n = 4k + 2$.
iv) Vi har to summer som er like og skal addere 1, 2 og 3 til dem. Dette kan gjøres slik at summene fortsatt blir like store, dvs. at vi får to like høye tårn. I dette tilfellet er n tre mer enn et tall i 4-gangen, $n = 4k + 3$. Dette viser at hvis $n = 4k$ eller $n = 4k + 3$, så kan vi lage to like summer av tallene når alle tallene skal brukes nøyaktig én gang, dvs. at vi kan bygge to like høye tårn.

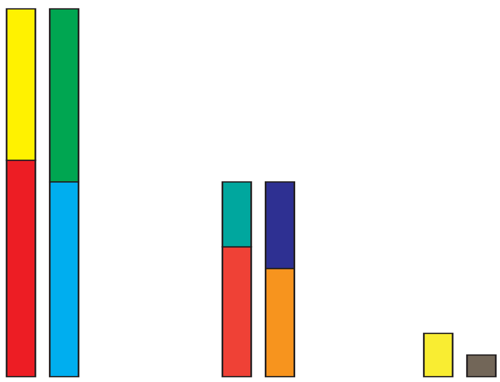
Denne metoden kan demonstreres ved hjelp av f.eks. Cuisenaire-staver.

Tallene symboliseres ved hjelp av stavene i Figur 1.



Figur 1: Cuisinaire-staver i grupper på fire.

Vi deler inn stavene i grupper på fire og fire, begynn med den lengste. I dette tilfellet får vi to staver til overs (rest). Stavene innenfor hver gruppe settes så sammen som i Figur 2.



Figur 2

Det er lett å se at vi nå kan lage to like høye tårn uten å bruke de to minste stavene. Skal disse stavene også brukes, blir byggingen umulig, fordi vi kan lage to tårn med høydeforskjell 1.

Utvidelse av oppgaven: Bygging av tre like høye tårn

En nødvendig betingelse for å kunne utføre denne byggingen er at T_n må være delelig med 3. Dette er helt parallelt med den nødvendige

Torkildsen, O. E. (2023). Ei eske med to klosser. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 34*(3), 43.

betingelsen for å bygge to like høye tårn.

Er så betingelsen tilstrekkelig? Nei, f.eks. er $T_2 = 3$ og $T_3 = 6$, men det er umulig å bygge tre like høye tårn i disse to tilfellene, det er kort og godt ikke nok klosser. Sagt på en annen måte er det ikke mulig å uttrykke f.eks. $T_3/3 = 2$ som tre ulike summer (summer med ulike ledd) ved å bruke tallene 1, 2 og 3, og bare bruke ett av hvert tall.

For T_5 er det mulig å få til tre ulike summer som er 5, ved hjelp av tallene 1, 2, 3, 4 og 5. Det viser seg at den nevnte betingelsen er tilstrekkelig dersom $n \geq 5$, men det er slett ikke opplagt.

For å vise dette anvender vi en modifisert utgave av den siste metoden som ble brukt ved to like høye tårn.

La som tidligere tallene være 1, 2, 3, …, n og anta n > 5. Del tallene inn i grupper på seks og seks, begynn med det største. Anta at vi får k slike grupper, og at det vil være r tall til overs når inndelingen er foretatt. r vil være større enn eller lik 0 og mindre enn 6. Tallene i hver seksergruppe kan settes sammen slik at vi får tre summer som gir samme svar. (Største og minste, nest største og nest minste, de to midterste.) Når dette er gjort med alle k-gruppene, har vi tre ulike summer med samme svar, og for de r-tallene som er til overs, har vi følgende muligheter:

i) $r = 0$, alle tallene er brukt
ii) $r = 1$, tallet 1 er igjen
iii) $r = 2$, tallene 1 og 2 er igjen
iv) $r = 3$, tallene 1, 2 og 3 er igjen
v) $r = 4$, tallene 1, 2, 3 og 4 er igjen
vi) $r = 5$, tallene 1, 2, 3, 4 og 5 er igjen

Hvis vi er i situasjonene i) eller vi), kan vi etter det som er sagt tidligere, få til tre ulike summer med samme svar. Tilfellene ii) og v) kan vi se bort fra fordi da vil T_n ikke være delelig med 3.

Hva da med tilfellene iii) og iv)? Summen av de tallene som er igjen, er delelig med 3, men som vi har sett tidligere, er det umulig å få til tre ulike summer når bare disse tallene skal brukes. Skal det være mulig å få til tre ulike summer når alle tallene skal benyttes, må vi bytte om med noen av de tidligere plasserte tallene. Det er mulig å gjøre dette.

iii) Siste seksergruppe er 3, 4, 5, 6, 7 og 8, som var satt sammen til de tre ulike summene (med samme svar). Nå skal 1 og 2 også være med. Det betyr at vi må lage tre ulike summer med svar 12. Dette kan gjøres på flere måter, f.eks. slik:

$$1 + 3 + 8 = 5 + 7 = 2 + 4 + 6.$$

Vi har dermed godtgjort at det her er mulig å lage tre ulike summer med svar $T_n/3$.

iv) Vis at vi også her får samme konklusjon som i iii).

Sammenholder vi resultatene over, har vi at når $n > 4$, kan det lages tre ulike summer med svar $T_n/3$, når $n = 6k$, $n = 6k + 2$, $n = 6k + 3$ eller $n = 6k + 5$. Dette siste kan sammenfattes til $n = 3k$ eller $n = 3k + 2$.

Videre at det er umulig å få til tre ulike summer med det nevnte svaret, når $n = 6k + 1$ eller $n = 6k + 4$, dvs. $n = 3k + 1$.

Hva så med å bruke de andre metodene? Utgangspunktet må da være å undersøke når T_n er delelig med 3.

Bruk av forskjeller

Ta utgangspunkt i klossene ($n > 4$) og lag tre tårn slik at to av tårnene er like høye. Hvis forskjellen mellom de to like høye tårnene og det tredje tårnet er delelig med 3, er T_n delelig med 3.

Tabell

Det går greit å finne mønsteret.

Torkildsen, O. E. (2023). Ei eske med to klosser. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 34*(3), 43.

Formel for T_n

Vi skal bestemme de $n > 4$ som fører til at $\frac{n(n+1)}{2 \cdot 3}$ er et helt tall.

Siden 3 et primtall og 2 og 3 ikke har felles faktorer, gir dette at 3 må dele enten n eller $n + 1$. Følgelig må $n = 3k$ eller $n = 3k + 2$.

Legg merke til at byggingen av tre like høye tårn går «lettere» (kan utføres «oftere») enn byggingen av to like høye tårn. For andre antall tårn kan de samme teknikkene benyttes.

Antall tvillingtårn

På hvor mange måter kan vi bygge to like høye tårn når vi har 11 klosser?

Siden $T_{11} = 66$, blir tårnhøyden på tvillingtårnene 33. Det er underforstått at den rekkefølgen klossene legges (på) i, er uvesentlig. Dette betyr at summer som inneholder de samme leddene, betraktes som identiske, f.eks. 3 + 9 + 10 +1 1 og 9 + 3 + 10 + 11. For at to summer skal være ulike, må de skille seg på minst ett ledd.[5]

Matematisk er dette et partisjonsproblem. Slike problemer er ikke trivielle, og vi forsøker derfor ikke å finne en formel for det søkte antallet. Dette betyr ikke at det er umulig å løse denne oppgaven. Går vi systematisk til verks, er det bare snakk om å bruke litt tid for å finne de 35 løsningene. Her kan flere strategier brukes.

Foretar vi samme undersøkelse med 12 klosser, finner vi at da vil det være 53 ulike par med to like høye tårn.

Avslutning

Det foregående viser at dette er en oppgave med rike muligheter. Oppgaven kan brukes på alle klassetrinn fra og med 1. klasse. Alle elevene vil ikke komme like langt, men alle vil kunne arbeide med deler av oppgaven, og alle kan få utfordringer, også elever som er «flinke» i matematikk. (Oppgavens vanskegrad øker når antall tårn er et tall med mange primtallsfaktorer.) La elevene få tid til å arbeide med stoffet alene eller aller helst i grupper, og la elevene få tid og anledning til å diskutere oppgaven for å komme fram til mulige løsningsstrategier.

Noter

1 Se f.eks. Breiteig og Venheim s. 261 eller Torkildsen 1990.

2 Jeg velger å bruke betegnelsen forskjeller framfor differanser. Dette fordi differanser, i matematikken, brukes i forbindelse med tallrekker og forskjellen/differansen mellom to ledd i slike. Se f.eks. Breiteig og Venheim s. 261.

3 Dette er de tallene som er tre mer enn tallene i 4-gangen eller alternativt én mindre enn tallene i 4-gangen, $4k - 1$.

5 Siden summene har konstant sum 33, betyr dette at to ulike summer må skille seg på minst to ledd.

Referanser

Burton, L. (1986). *Thinking Things Through. Problem solving in Mathematics*. Basil Blackwell

Breiteig, T. & Venheim, R. (1993). *Matematikk for lærere. Bind I*. TANO

Torkildsen, O.E. (1991): Matematikken bak oppgaven i nr. 2 1990. *Tangenten — tidsskrift for matematikkundervisning, 2* (2), 6.

Torkildsen, O. E. (2023). Ei eske med to klosser. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 34*(3), 43.

www.caspar.no/tangenten