Rettferdighet i sannsynlighet – et katt-og-mus-spill?

Innledning

Det er iøynefallende at sannsynlighet blir regnet som et tema som er vanskelig å formidle av lærere og matematikkdidaktikere, ifølge Dahl (2003). I dette ligger den komplekse forståelsen av begreper som *tilfeldighet*, *sjanse*, *store talls lov* og *rettferdighet*, for å nevne noen. Kunnskap om disse begrepene har fått stor relevans i matematikkopplæringen siden sannsynlighet spiller en viktig rolle i innlæringen av andre temaer i faget. Det er i tillegg nødvendig for å gjøre riktige tolkninger av stokastiske data og informerte beslutninger i daglige livssituasjoner som involverer usikkerhet og slutninger (se Batista mfl. 2022; Batanero mfl., 2016; Sharma, 2016). I artikkelen «Bør det innføres diktatur i Norge?» argumenterer Hana for viktigheten av å forstå den matematiske strukturen til valgordninger i prosessen med å få innsikt i de mekanismer som styrer demokratiske prosesser (Hana, 2009). Artikkelen diskuterer også kriterier som det kan være naturlig å kreve at en rettferdig valgordning skal ha. Kan det tenkes at noen av disse kriteriene også kan gjelde for et rettferdig sannsynlighetsspill? Dette er selvsagt et hypotetisk spørsmål, men det belyser det faktumet at «rettferdighet» kan ha ulik betydning, avhengig av den konteksten begrepet benyttes i. Videre peker kjerneelementet *matematiske kunnskapsområder* på kunnskap om statistikk og sannsynlighet som et viktig kunnskapsområde som «gir elevene et godt grunnlag når de skal gjøre valg i sitt eget liv, i samfunnet og i arbeidslivet» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3).

Raz Jaff
OsloMet – storbyuniversitetet
rajaf@oslomet.no

Når elevene skal lære om sannsynlighet, bør vi begynne med spill og eksperimenter. Aktivitetene vi starter med, bør være slik at det ikke er lett å forutsi utfallet (Cañizares mfl., 2003). Dette gir elevene motivasjon for å spille mange ganger, holde oversikt over resultatene, og utvikle grunnleggende ideer om sannsynlighet, særlig med tanke på eksperimentell og teoretisk sannsynlighet. Et slikt eksempel er spillet Borel, presentert i Skåsheim og Brakestad (2022). Her argumenterer Skåsheim og Brakestad blant annet for hvordan Borel kan benyttes for å vise elevene at utregninger i sannsynlighetsregning ofte er i strid med intuisjonen vår. Videre bør hensikten med bruk av spill være å introdusere elevene for begreper som har med sannsynlighet å gjøre, deriblant rettferdighet. En idé som det er viktig å utvikle tidlig, er at mens resultatene varierer, forteller sannsynligheten oss hva som vanligvis skjer og kan bli funnet ved å eksperimentere med et stort antall forsøk. Dette kan lede klassediskusjonen over til i hvor stor grad spillet faktisk kan ansees som rettferdig. Enda

Jaff, R.. (2023). Rettferdighet i sannsynlighet – et katt-og-mus-spill? *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 34*(2), 14–20.

viktigere: man bør også avklare hva elevenes forståelse av «rettferdighet» faktisk er.

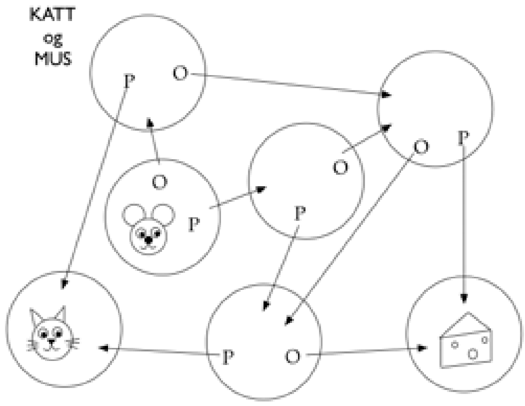
På bakgrunn av dette presenterer jeg her et sannsynlighetsspill som jeg har gitt til førsteårsstudenter ved masterprogrammet for grunnskolelærerutdanningen 1.–7. Spillet heter «katt-og-mus» og er inspirert av Brian Lannens artikkel «*International Perspectices: Cat and Mouse*» (Lannen, 1999). Studentene fikk gjennomføre spillet i grupper på to eller tre, og fikk spille minimum fem runder. Hver runde skulle noteres ned. På bakgrunn av dette skulle studentene diskutere resultatene de hadde fått, og hvorvidt spillet var rettferdig eller ikke. Her presenterer jeg studentenes resultater, samt hvordan spillet kan benyttes i forståelsen av rettferdighet i sannsynlighet. I lys av resultatene fra min undersøkelse presenterer jeg også hvordan spillet kan utvides, modifiseres og benyttes som en problemløsningsoppgave for alle trinn, i tråd med fagfornyelsen og LK20.

Spillets regler

Spillbrettet (se Figur 1) viser en stasjonær katt, en ostebit og en rekke tunneler som musa kan bevege seg gjennom. Startposisjonen til musa er markert med et bilde av en mus. En tellebrikke kan benyttes for å indikere posisjonen og forflytningen til musa. Spillet går ut på å kaste en sekssidet terning for så å flytte tellebrikken i retning av «O» hvis terningen viser oddetall, eller «P» hvis terningen viser partall. Tellebrikken kan kun forflytte seg langs en tunnel én gang, og kun i pilretningen. Spillet vinnes hvis musa kommer seg til ostebiten, og man har tapt hvis musa ender opp hos katten. Etter en nærmere undersøkelse av spillbrettet kan man observere at ved maksimum fire kast vil musa enten havne hos katten eller osten.

En teoretisk tilnærming til spillet

Spillet kan benyttes som et grunnlag for å jobbe med sannsynlighet på 9. trinn, der læreplanen påpeker at elevene skal «beregne og vurdere sannsynlighet i statistikk og spill» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 13).



Figur 1

Vi vet at spillet har to utfall. Det ene er at musa ender opp med å få en ostebit, mens det andre er at den ender opp med å møte katten. Vi kan dermed kalle de to hendelsene for «ost» og «katt». Siden disse to hendelsene er de eneste, og siden de ikke kan inntreffe samtidig, vil disse to hendelsene være komplementære i forhold til hverandre, slik at

$$P(\text{ost}) + P(\text{katt}) = 1$$

Det er flere måter å illustrere utfallene på, deriblant liste og valgtre/trediagram. Ved nærmere undersøkelse av spillbrettet på Figur 1 kan man faktisk se at dette er en variant av trediagram. For ordens skyld gir jeg her en oversikt over utfallene for de to hendelsene i listeform. Videre innfører jeg notasjonen «O» for oddetall og «P» for partall, slik at for eksempel «OOP» betyr «oddetall», «oddetall», «partall» i den angitte rekkefølgen. Tabell 1 viser de mulige utfallene for hendelsene «ost» og «katt».

Siden ingen av utfallene inntreffer samtidig, er det nærliggende å betrakte utfallene som

Ost: OOP, OOOO, POP, POOO, PPO

Katt: OP, OOOP, POOP, PPP

Tabell 1: mulige utfall for hendelsene «ost» og «katt».

Jaff, R.. (2023). Rettferdighet i sannsynlighet – et katt-og-mus-spill? *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 34*(2), 14–20.

www.caspar.no/tangenten

disjunkte. Vi benytter således addisjonssetningen for å summere utfallene for hendelsen «ost»:

$$
\begin{aligned}
P(\text{ost}) &= P(OOP) + P(OOOO) + P(POP) \\
&\quad + P(POOO) + P(PPO) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{8}{16} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Som følge av setningen om komplementære hendinger kan vi dermed konstatere at

$$P(\text{katt}) = 1 - P(\text{ost}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

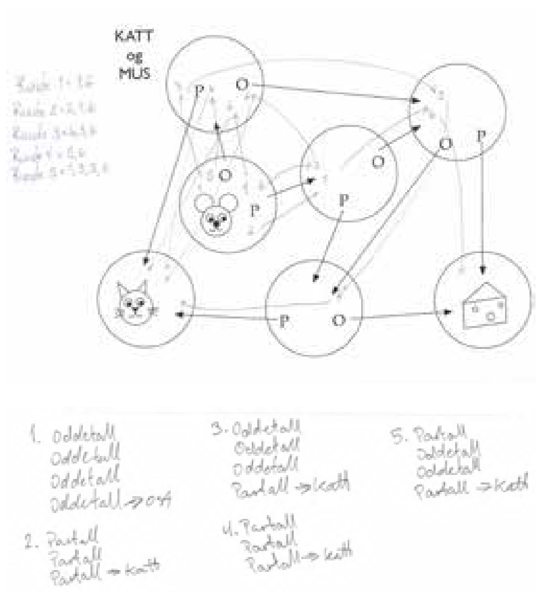
Vi kan selvsagt kontrollere resultatet ved å regne ut sannsynligheten for hendelsen «katt» også, men dette overlater jeg til leseren. Det er likevel bemerkelsesverdig at til tross for at det er flere utfall for hendelsen «ost» enn «katt», så er det like stor sannsynlighet for at hver av de to hendelsene inntreffer. Det bør også understrekes at dette kan være en gyllen mulighet for læreren til å la elevene utforske ulike deler av sannsynlighet som uavhengige hendelser, komplementære hendelser og utfallsrommet.

Hvordan løste studentene spillet?

Som nevnt innledningsvis ble studentene delt inn i grupper på to og to, og enkelte grupper bestod av tre studenter ($n = 30$). Studentene fikk instrukser på hvordan de skulle gjennomføre spillet, slik som beskrevet under «spillets regler». Videre fikk studentene instrukser om å spille minimum fem runder, der de skulle loggføre hver runde. Til sist, basert på de resultatene de hadde fått, skulle de diskutere følgende spørsmål:

- Diskuter resultatet som dere fikk, og skriv ned bemerkninger på arket.
- Var spillet rettferdig? Begrunn!
- Hva er det som faktisk er like sannsynlig her?

Studentene ble også informert om at resultatene de legger frem, er anonyme og kan bli brukt til forskningsformål. De gruppene som ikke ønsket å delta, trengte ikke å levere inn sin besvarelse. 15 grupper har kun gitt resultatet av antall runder spilt, men ikke gitt en forklaring på hvorvidt spillet er rettferdig eller ikke. Det er likevel interessant å studere de ulike metodene gruppene har benyttet for å presentere resultatet, hvor Figur 2 presenterer to av dem.

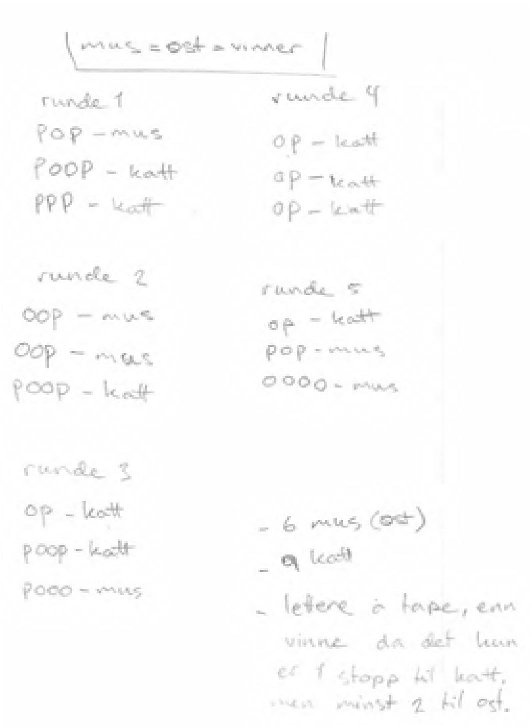


Figur 2

Enkelte av gruppene argumenterte for at siden det er færre steg til katten kontra osten, så må det være lettere å tape enn å vinne. Figur 3 viser en slik argumentasjon. Siden det kun er ett stopp til katten (referanse til tilfellet OP, se Figur 1), og minst to stopp til osten, så er jo spillet ikke rettferdig. Her kan man også anta at gruppen har basert noe av sin konklusjon på de empiriske dataene, nemlig at etter å ha spilt

Jaff, R.. (2023). Rettferdighet i sannsynlighet – et katt-og-mus-spill? *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 34*(2), 14–20.

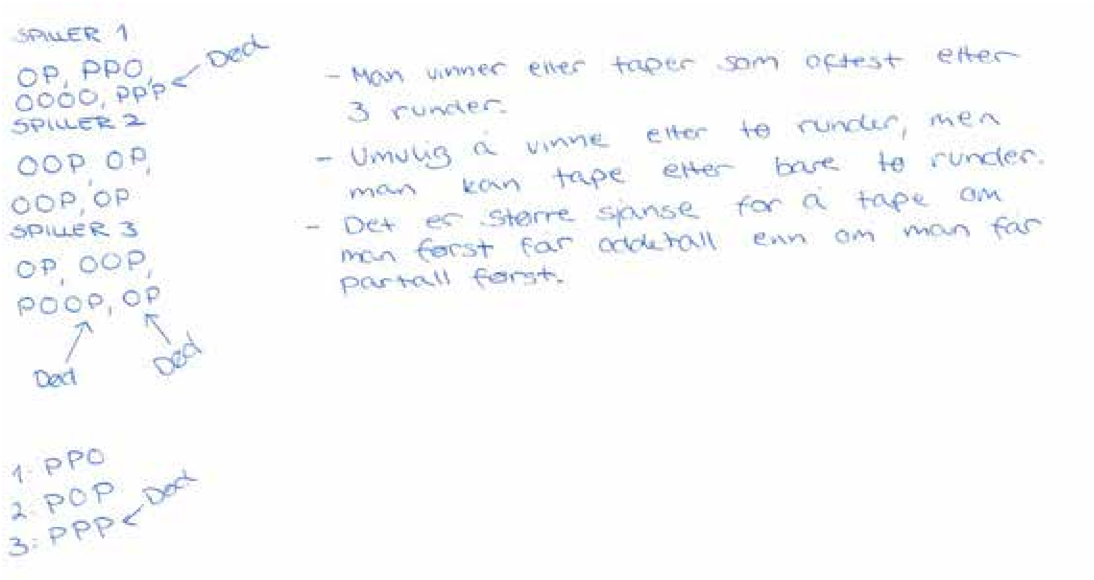
www.caspar.no/tangenten



Figur 3

fem runder hver, så har deltakerne endt opp ni ganger hos katten, mot seks ganger hos osten. En bemerkning som er verdt å påpeke, er at tre av gruppene baserte spillets resultat på hvorvidt man fikk oddetall eller partall på terningen først, og at dette avgjorde spillets videre gang. Figur 4 viser en slik argumentasjon. Her ser vi at gruppa har spilt fem runder totalt, og markert de gangene spiller 1, 2 og 3 har tapt («død»). Videre gir gruppa noen viktige bemerkninger. Først påpekes det at man vinner eller taper som oftest etter tre runder, etterfulgt av argumentet om at man ikke kan vinne etter bare to runder, men at tap er fullt mulig. Dette er i samsvar med den teoretiske begrunnelsen presentert tidligere. Det er likevel en interessant observasjon at «det er større sjanse for å tape om man først får oddetall, enn om man får partall først», dvs. ved første kast.

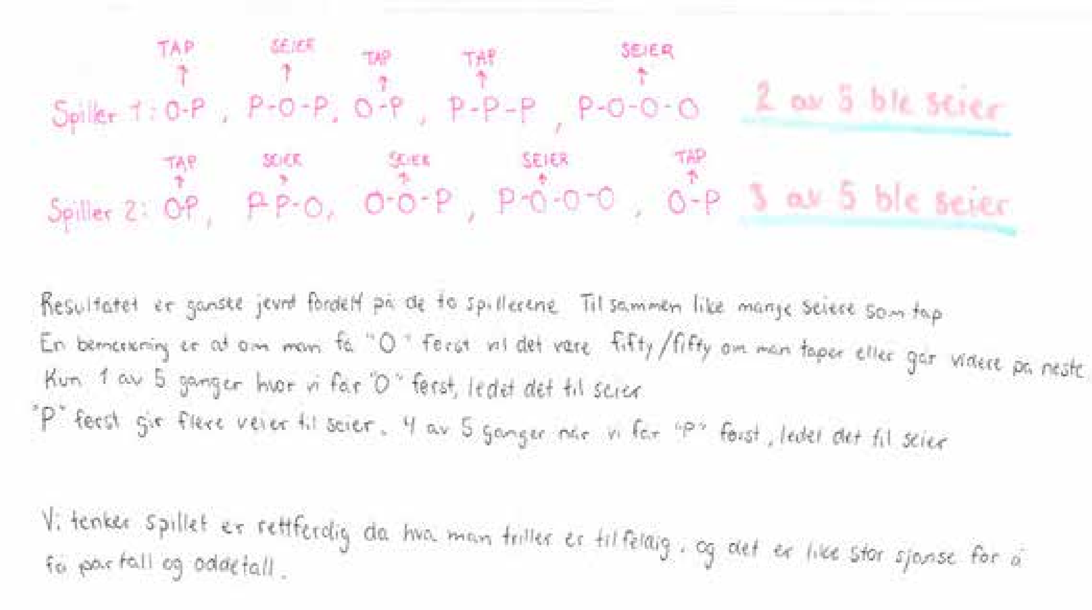
En annen gruppe argumenterer for at om man får OO etter to runder (kontra OP), så har man flere muligheter for å havne hos osten. Basert på dette konkluderer gruppa med at det ikke er like muligheter, og dermed ikke rettferdig spill. Gruppa begrunner dette med resultatene de har fått, der resultatene for «vinn» (at musa kommer til osten), er listet opp med rutene OOP og OOOO, mens «tap» (at musa havner hos katten) er ruten OP. Studerer vi



Figur 4

Jaff, R.. (2023). Rettferdighet i sannsynlighet – et katt-og-mus-spill? *Tangenten – tidsskrift for matematikk-undervisning, 34*(2), 14–20.

www.caspar.no/tangenten



Figur 5

Tabell 1, kan vi se at det er to ruter som gir «vinn» hvis man først får OO etter to runder spilt (OOP og OOOO), mens kun én rute som gir «tap» (OOOP). Får man ruten OP, så er det direkte tap. Vil gruppas argumentasjon stemme med den teoretiske sannsynlighetsmodellen?

For tilfellet der man får OO etter to runder, har vi sannsynlighetene:

$$
\begin{aligned}
&P(\text{ost}) = P(\text{OOP}) + P(\text{OOOO}) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}
\end{aligned}
$$

For tilfellet der man får OP, som leder til direkte tap, har vi sannsynligheten:

$$P(\text{katt}) = (\text{OOOP}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Selv om det er to ruter til å komme til «vinn» for tilfellet med OO, så er det altså større sannsynlighet for «tap» med ruten OP, noe som riktig nok var overraskende for gruppa.

En tredje gruppe argumenterer med at hvis man får O først, så er det like stor sjanse om man taper eller går videre til neste posisjon. Denne begrunnelsen kan vi merke oss er i strid med begrunnelsen presentert på Figur 4. Videre argumenterer gruppa for at hvis man får P først, gir det flere ruter til seier. Dette er i tråd med Tabell 1, der vi ser at tre ruter leder til «ost», hvis man får P først, mot to ruter til «katt». Gruppa konkluderer så med at spillet er rettferdig, siden hva man får på terningen, er tilfeldig, og at det er like stor sjanse for å få partall som oddetall (se Figur 5).

Ved å trekke frem ulike argumenter, slik jeg har gjort her, gir dette læreren muligheten til å arbeide med kjerneelementet *resonnering og argumentasjon* i LK20. Dette gjøres ved at læreren legger til rette for at elevene må diskutere, formulere egne argumenter og forklaringer, finne sammenhenger og begrunne deres meninger (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3). Gjennom klasseromssamtaler kan elevene dermed utvikle en felles forståelse for rettferdighet i spillet, men også for viktige begreper i sannsynlighet.

Jaff, R.. (2023). Rettferdighet i sannsynlighet – et katt-og-mus-spill? *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 34*(2), 14–20.

www.caspar.no/tangenten

Modifisering av spillet og veien videre

Avhengig av trinn og elevenes forkunnskaper åpner spillet for en rekke modifikasjoner og utvidelser. Elevene kan få erfaring med ulike versjoner av spillet, og på bakgrunn av dette kan de diskutere hvorvidt spillet er rettferdig eller ikke. Som Lannen (1999) også påpeker, vil man oppleve at elever på de laveste trinnene definerer rettferdighet som det tilfellet der musa alltid havner hos osten. Riktig nok vil dette synet endre seg hos de eldre elevene, og nærme seg et mer «femti-femti»-tilfelle. Dette har vi også sett tendenser til blant studentbesvarelsene. Her mente en rekke studenter at spillet ikke var rettferdig fordi musa havnet hos katten flere ganger enn hos osten. Det bør påpekes at mye av grunnlaget for denne konklusjonen lå i studentenes empiriske resultater. Dette forteller oss om viktigheten av empiriske data. I de innledende fasene bør elevene ha en empirisk tilnærming til spillet. Dette vil gi elevene erfaring i å samle, organisere og presentere data. Ikke minst vil det gi elevene en gyllen mulighet i å tolke innsamlete data, og samtidig unngå å møte på barrieren som en rent teoretisk tilnærming vil skape. Elevene får kompetanse i å utforske og analysere funn fra reelle datasett, og lærer å vurdere hvor gyldige slike funn er. Dette er i tråd med det tverrfaglige temaet *demokrati og medborgerskap* (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 4). En teoretisk tilnærming bør komme ved et senere tidspunkt etter at elevene har fått etablert en kontekstuell forståelse av sjanse, forbedret databehandlingskunnskapene sine og økt sin kunnskap i sannsynlighet.

For de laveste trinnene kan spillet forenkles ved å erstatte en terning med mynt, og endre «P» og «O» i spillet til «K» for krone og «M» for mynt, eventuelt kan fargekoder også benyttes. For eksempel påpeker læreplanen for 5. trinn at elevene skal «diskutere tilfeldighet og sannsynlighet i spill og praktiske situasjoner og knytte det til brøk» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 9). Dette vil være en forenkling for de laveste trinnene, samtidig som man bevarer spillets grunnleggende ideer, nemlig tilfeldighet, rettferdighet og sjanse. I dette ligger prinsippet om at man ikke kan benytte strategi for å vinne i spillet, men at man er bundet av sannsynligheten og utfallet av mynten/terningen. Ved et senere tidspunkt kan man selvsagt erstatte mynten med en terning, og la elevene erfare partall og oddetall gjennom spillet. Her vil det åpnes en gyllen mulighet til å gi elevene en kontekst og mening til partall og oddetall (Lannen, 1999). Videre kan spillet også utvides ved at det introduseres primtall og sammensatte tall. Her er det dog fordelaktig å benytte to eller flere terninger, noe som selvsagt vil øke kompleksiteten og utfordringen. Man benytter to terninger med forskjellige farger, for eksempel rød og blå. Rød terning representerer første siffer i tallet (tierplassen), mens blå representerer enerplassen. Én på rød terning og tre på blå terning gir dermed tallet 13, som er et primtall, og som indikerer at musa må gå i retning av «P» (primtall). Hadde tallet derimot vært 14, måtte musa ha gått i retning av «S» (sammensatt tall). Vi ser at effekten på spillets resultat er signifikant, da det ikke er likt antall primtall og sammensatt tall for de 36 utfallene av to terningkast.

Lannen (1999) presenterer flere modifikasjoner og utvidelser, deriblant ulike startposisjoner for musa, legge til flere tunneler og posisjoner, tillatte katten å flytte på seg og legge til flere spillere. Her kan man utfordre elevene i prosessen ved for eksempel å spørre hvor og hvor mange tunneler som må legges til for at spillet ikke lenger kan regnes som rettferdig? Hvordan kan man legge til flere posisjoner og tunneler og samtidig beholde spillets resultater? Hva om katten også beveger seg, hva slags resultater kan man få, da? Dette åpner også for implementering av programmering for å løse problemet. For de eldre elevene kan et programmeringsspråk som Python vurderes etter hvert som spillet blir mer komplekst. I læreplanen for 9. trinn påpekes det at elevene må kunne «simulere utfall i tilfeldige forsøk og beregne sannsynligheten for at noe skal inntreffe, ved å bruke programmering» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 13). Uansett hvordan man benytter spillet, er jeg av den tro at et

Jaff, R.. (2023). Rettferdighet i sannsynlighet – et katt-og-mus-spill? *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 34*(2), 14–20.

www.caspar.no/tangenten

slikt spill vil være med og gi elevene en idé om hva rettferdighet i sannsynlighet og i matematikk faktisk er.

Referanser

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S. & Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability. ICME-13 Topical Surveys*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3_1

Batista, R., Borba, R. & Henriques, A. (2022). Fairness in games: a study on children's and adults' understanding of probability. *Statistics education research journal, 21*(1). https://doi.org/10.52041/serj.v21i1.79

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. & Ortiz, J. J. (2003). Children's understanding of fair games. I M. A. Mariotti (Red.), *European research in mathematics education III: Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 3). ERME.

Dahl, H. (2003). Hvorfor er sannsynlighet så vanskelig? *Tangenten – tidsskrift for matematikk-undervisning, 14*(1), 35–36.

Hana, G. M. (2009). Bør det innføres diktatur i Norge? *Tangenten – tidsskrift for matematikk-undervisning, 20*(2), 8–11.

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Lannen, B. (1999). International perspectives: Cat and mouse. *National Council of Teachers of Mathematics, 4*(7), 456–459.

Sharma, S. (2016). Probability from a socio-cultural perspective. *Statistics Education Research Journal, 15*(2), 126–144. https://doi.org/10.52041/serj.v15i2.244

Skåsheim, G. & Brakestad, I. H. (2022). Borel – eit spel for sannsynsrekning, *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(4), 18–22.

Jaff, R.. (2023). Rettferdighet i sannsynlighet – et katt-og-mus-spill? *Tangenten – tidsskrift for matematikk-undervisning, 34*(2), 14–20.

www.caspar.no/tangenten