Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

Krogh Arnesen

Generiske eksempler som argumentasjon

De siste årene har resonnering, argumentasjon og bevis stadig blitt trukket fram som aktiviteter som det må arbeides mer med i matematikkfaget. Også den nye norske læreplanen reflekterer dette. Resonnering og argumentasjon er et av kjerneelementene i matematikk, og skal prege innholdet i faget på tvers av tema og trinn. Ordlyden i kjerneelementet inkluderer at «resonnering i matematikk handlar om å kunne følgje, vurdere og forstå matematiske tankerekkjer», og at «argumentasjon i matematikk handlar om at elevane grunngir framgangsmåtar, resonnement og løysingar og beviser at desse er gyldige». Det handler med andre ord både om å støtte elevenes læring og forståelse for matematikken og om å trekke skolematematikken nærmere matematikk som vitenskapsfag, der det å gi matematisk gyldige argumenter (eller bevis) for påstander har vært en sentral praksis siden Euklids tid. En påstand i matematikk kan handle om ett gitt eksempel eller en løsning på en oppgave, den kan handle om en endelig mengde eksempler, eller den kan handle om uendelig mange eksempler. Den siste typen påstand kaller vi en generell påstand, og det er slike som er i fokus i denne teksten.

Kristin Krogh Arnesen
NTNU
kristin.arnesen@ntnu.no

Arbeid med resonnering og argumentasjon i skolen kan gjøres på mange måter. I denne artikkelen skal vi se på en tilnærming til bevis som kalles generiske eksempler. Jeg skal definere hva dette er, hvordan og når det kan brukes i klasserommet, hva man kan vinne på å bruke denne argumentasjonsformen, og hvilke utfordringer det kan innebære. Teksten er delvis basert på en undersøkelse jeg gjorde sammen med Kirsti Rø (Rø & Arnesen, 2020), og inneholder også data fra klasserom samlet gjennom et større forskningsprosjekt på resonnering og bevis på barnetrinnet (se https://www.ntnu.no/ilu/proprimed).

Hva er generiske eksempler?

På 6. trinn arbeider elevene med hypotesen «summen av to partall er alltid et partall». Er det alltid sånn, aldri sånn, eller noen ganger sånn? Under arbeidet med oppgaven har mange av elevene forsøkt seg fram med ulike eksempler, som de to elevene Azra og Amal gjør her:

Azra	Hvis man legger sammen 2 pluss 2, blir det 4. 4 er et partall. For 2 pluss 2, 4 pluss 4, 8 pluss 8, 16 pluss 16 …
Amal	Jeg tror det skjer noen ganger?
Azra	Ja, alle. Bare si noen partall.
Amal	8 pluss 8.
Azra	2 pluss 8, det blir 10.
Amal	8 pluss 8. 2 pluss 2. 4 pluss 4. 6 pluss 6.

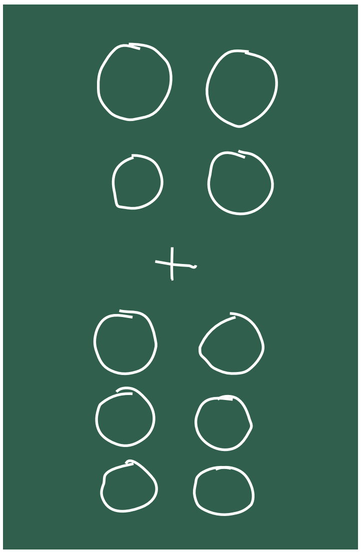
Krogh Arnesen, K. (2022). Generiske eksempler som argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(1), 2–8.

www.tangenten.no

Azra	Ikke bare ta de samme tallene, si noen forskjellige.
Amal	14 pluss 14.
Azra	16 pluss 14.
Amal	84! Nei 86, pluss 86.
Azra	Så høyt, det gidder jeg ikke å regne ut.
Azra	100 pluss … 98.

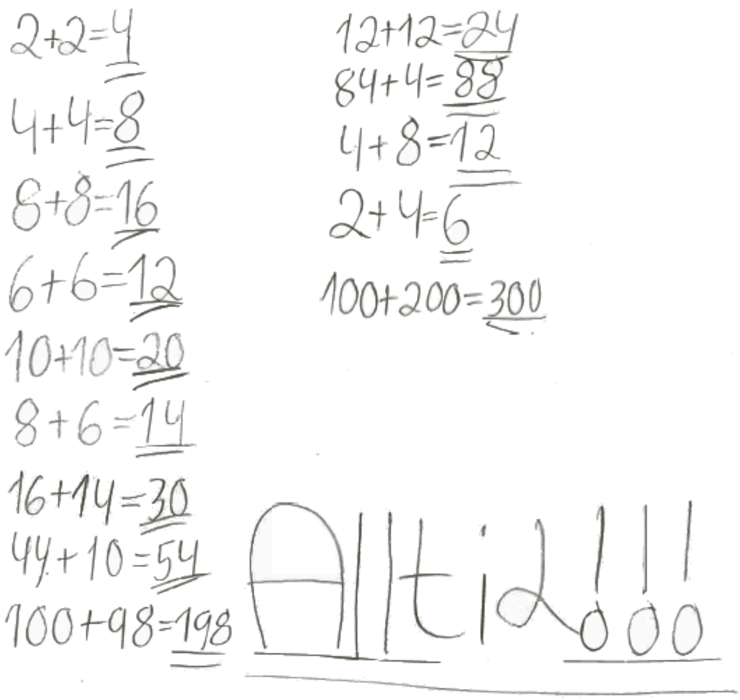
Azra og Amal har prøvd seg fram med flere eksempler på summer av to partall. De har prøvd med to like tall, to ulike tall, små tall og store tall. Figur 1 viser hva de til slutt har skrevet på arbeidsarket.

De konkluderer ganske tydelig med at denne hypotesen *alltid* stemmer. Amal utdyper denne konklusjonen for læreren når han kommer forbi: «Hvis vi klarer å finne så mange, så er vi ganske sikre på at det er alltid.» Men læreren ønsker å utfordre denne typen argumentasjon. I den felles diskusjonen litt senere spør han: «Kan det ikke være sånn at en eller annen plass så lurer det seg inn et svar som ikke blir et partall, da? Dere har jo ikke undersøkt alle partallene. Kan vi med sikkerhet vite at det alltid blir partall, ved å sjekke ut noen?» Etter hvert i diskusjonen tilbyr læreren et annet argument. Med støtte fra elevene minner han om at et partall er et tall som kan deles inn i par. Han sier videre: «Men hvis du plusser sammen to partall, for eksempel fire og seks, så ser vi jo at her er det bare par.» Han tegner en figur på tavla (figur 2), og så kommenterer han: «Uansett hvilket partall det er, om vi bruker 12, 14 eller 20, så vil det alltid bare bestå av par.»



Figur 2: Lærerens illustrasjon av 4 + 6.

Hva er det som skiller begrunnelsen til Amal og Azra fra lærerens begrunnelse? Og hva er det som kjennetegner lærerens argument? Er det en matematisk gyldig framgangsmåte for å vise at summen av to partall er et partall?



Figur 1: Azra og Amals skriftlige svar på om hypotesen stemmer.

Vi kan si at elevenes argument er empirisk: Det baserer seg på at påstanden ser ut til å stemme for ett, to, eller mange eksempler, og dermed virker det sannsynlig at påstanden må stemme bestandig. Det er jo ofte slik vi argumenterer i andre fag, for eksempel når vi gjør eksperimenter i naturfag: Hvis eksperimentet gir samme utfall gang etter gang, regner vi med at det må være sånn. Men en slik argumentasjon er ikke gyldig i matematikken. Når vi har en generell påstand, altså en påstand som skal være sann for en uendelig stor mengde av tall (her: alle partall), er ikke empirisk argumentasjon tilstrekkelig. Det er dette læreren peker mot når han sier «Kan det ikke være sånn at en eller annen plass så lurer det seg inn et svar som ikke blir et partall, da?». Det trengs et matematisk gyldig argument for å vise at påstanden alltid er sann. Et slikt argument kan ta forskjellige former. La oss se på hva læreren gjør i sitt argument for påstanden om partall:

Lærerens argument bruker også et eksempel (4 + 6). Men han sier ikke: «4 + 6 blir 10, det er et partall.» Faktisk sier han ikke engang at svaret på regnestykket blir 10. Derimot bruker han matematiske egenskaper ved partall til å vise hvorfor summen 4 + 6 også er et partall, og ikke bare at det er et partall. Deretter peker læreren på at alle partall kan deles i par på denne måten, så man får samme oppførsel hos alle summer av partall. Dette argumentet er et generisk eksempel, det vil si et eksempel (her: 4 + 6) på en generell påstand (her: summen av to partall er alltid et partall) der man ser på hvilke matematiske egenskaper som får eksempelet til å fungere (her: begge tallene deles i par, da består også summen av par) istedenfor det spesielle ved akkurat dette eksempelet (her: summen er 10 som er et partall). Siden lærerens eksempel både får fram den matematiske sammenhengen i påstanden og sier noe om at dette alltid gjelder, er argumentet et gyldig argument – altså et bevis – for den generelle påstanden om at summen av to partall alltid er et partall.

En annen måte å argumentere for påstanden på er ved en generell logisk slutning (Stylianides, 2008). Da bruker man ikke eksempler, men kun et generelt språk. For påstanden med partallene kunne vi sagt at vi kan tenke på det ene partallet som én mengde med par og det andre som en annen mengde med par, og legger vi dem sammen, ja, da har vi fortsatt en mengde med par. Her er det ingen eksempler som er synlige – og heller ingen algebraisk notasjon, selv om vi naturligvis kunne representert dette argumentet ved hjelp av den algebraiske formuleringen $2k + 2m = 2(k + m)$, der k og m er vilkårlige positive heltall. Generelle logiske slutninger, skrevet med algebraisk språk, er ofte det mange tenker på når man snakker om bevis. Vi kan kalle bevis på denne formen for formelle bevis. En ting det er verdt å merke seg, er at det generiske eksempelet og det formelle beviset gjengitt her bruker samme egenskap ved partall (de er mengder av par) og nøkkelidé for argumentet (to mengder med par danner til sammen en ny mengde med par). Fordeler med å bruke et eksempel som utgangspunkt kan være at det konkretiserer det som skjer – man kan vente med å bruke et generelt språk, men man kan likevel bruke samme nøkkelidé som et formelt bevis. Det er også lett å ta utgangspunkt i den empiriske argumentasjonen som elevene allerede har gjort. Dessuten er det jo slik at når man i matematikken jobber med å argumentere for en generell påstand i matematikk, starter man gjerne med å utforske eksempler – det gjør også matematikere. De færreste, uavhengig av nivå, går rett på et formelt bevis for en påstand som man ikke allerede har en viss kjennskap til.

Mange som har forsket på bevis og argumentasjon i skolen, peker på at generiske eksempler er nyttige for elever, men på hvilken måte er det uenigheter om i litteraturen: Balacheff (1988) og Harel og Sowder (1996) mener at generiske eksempler først og fremst er en type argumenter som elever kan ha utbytte av før de har lært formelle bevis, eller som en overgang til disse ved

Krogh Arnesen, K. (2022). Generiske eksempler som argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(1), 2–8.

www.tangenten.no

å «oversette» fra generisk eksempel til formelt bevis. Dette så vi over at man kunne gjøre for påstanden om summer av partall. Det er også slik at ikke alle er enige om hvorvidt generiske eksempler er matematisk gyldige bevis. Stylianides (2008) kategoriserer imidlertid generiske eksempler som gyldige bevis, og det samme gjør Rowland (1998). Sistnevnte er dessuten uenig i at generiske eksempler kun bør være en tidlig form for argumentasjon i skolen, før man lærer formelle bevis: Han mener at generiske eksempler er nyttige i seg selv som argumenter, med styrke til både å forklare en påstand og overbevise om at den er riktig – på alle nivåer. I denne teksten deler jeg Rowlands syn, og jeg tar dermed som utgangspunkt at generiske eksempler, dersom de er gjort korrekt, er gyldige som matematiske bevis. Gjennom min egen bakgrunn som matematiker har jeg også sett hvordan generiske eksempler brukes i matematisk forskning. Har man lyktes i å konstruere et generisk eksempel for påstanden sin, da er man overbevist om at den må være korrekt. I vitenskapelige artikler blir de ofte «oversatt» til formelle bevis og videre raffinert, men nøkkelideen i beviset forblir ofte den samme.

Arbeid med generiske eksempler

Så hvordan bruker man generiske eksempler, og hvordan legger man til rette for at elever kan ta dem i bruk? Først og fremst bør man være klar over hvilke påstander som det gir mening å bruke generiske eksempler for. Det må være generelle påstander, som i eksempelet over. Oppgaver som handler om ett eller få eksempler (som «vis at 19 er et primtall» eller «på hvor mange måter kan man skrive 64 som et produkt av to heltall?»), har ikke nytte av generiske eksempler. Et annet aspekt ved bruk av generiske eksempler er å reflektere rundt hvilket eksempel man velger. Dersom læreren i eksempelet over hadde valgt å bruke 6 + 6 som utgangspunkt for det generiske eksempelet, kunne han gjort det samme argumentet, men da kunne man kommet i tvil om hvorvidt han faktisk har bevist at påstanden alltid gjelder – eller bare at den gjelder for summer av to like partall. Det er lurt å unngå eksempler som kan oppfattes som «spesialtilfeller». Kanskje er verken 2 + 4 (for små tall), 10 + 20 (hele antall tiere, det er spesielt) eller 8 + 8 (to like tall) velegnet til å vise påstanden om summer av partall. Velger man for store tall, som 88 + 114, kan eksempelet bli for stort å håndtere, i alle fall dersom man bruker en slik tegning som læreren på 6. trinn gjorde. Det gjelder å velge et eksempel som er passe stort, og passe «vilkårlig».

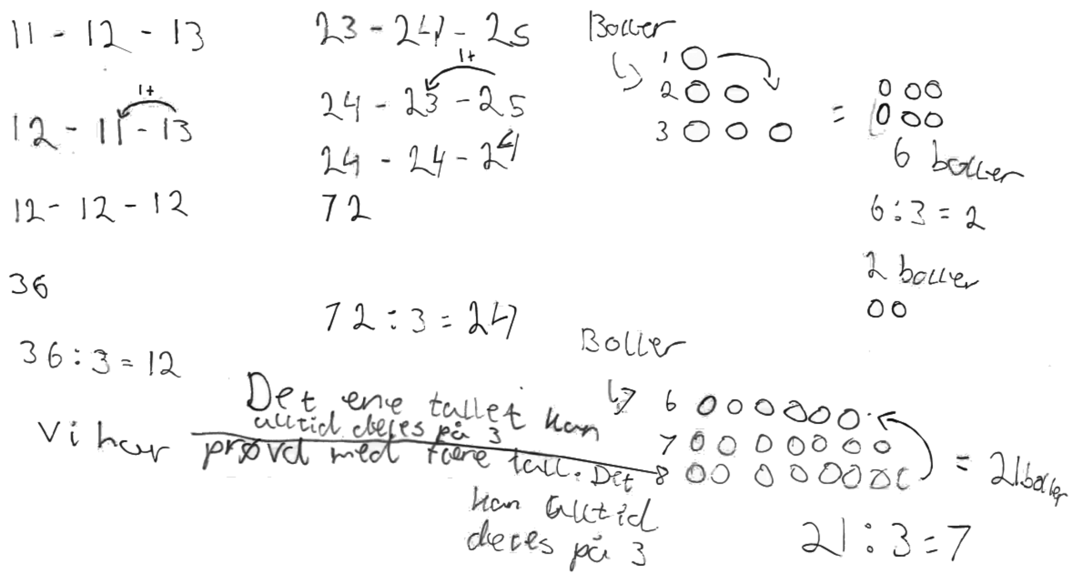
Stylianides (2007) sier, i sin definisjon av matematiske bevis, at ingrediensene som brukes i et bevis (definisjoner, påstander, symboler og språk som brukes), må være kjent for fellesskapet beviset legges fram i. Det vil si at hvorvidt et argument er matematisk gyldig, ikke bare avgjøres matematisk, men også ut fra om det passer for dem det er ment for. Dette gjelder naturligvis også for generiske eksempler. Hvis sjetteklassen over ikke hadde vært kjent med at partall er tall som består av par, hadde ikke lærerens argument fungert. Men generiske eksempler kommer også med et annet «personlig aspekt». Flere forskere (f.eks. Reid & Vallejo Vargas, 2018) påpeker at hvorvidt et generisk eksempel faktisk er generisk (og ikke bare empirisk), er avhengig av øyet som ser, fordi vi ikke alltid ser det samme i et eksempel. Jeg illustrerer dette med en elevbesvarelse fra 7. trinn. Klassen har arbeidet i grupper med å vise at summen av tre etterfølgende heltall alltid er delelig på 3. Figur 3 viser arbeidet til en av gruppene.

La oss først bare se på «kolonnen» lengst til venstre. Pilen «+1» fra 13 til 11 viser nettopp den matematiske nøkkelideen for hvorfor påstanden stemmer: Ved å flytte 1 fra det største til det minste tallet får man tre kopier av det mellomste tallet – og dermed må summen nødvendigvis være tre ganger det mellomste tallet. Men i den videre teksten kan det virke som om elevene går bort fra denne ideen, og heller går inn i et empirisk argument: For de tre 12-erne blir 36 til sammen, og så viser de at divisjonen 36 : 3

Krogh Arnesen, K. (2022). Generiske eksempler som argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(1), 2–8.

www.tangenten.no

Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning



Figur 3: Elevargument til hypotesen om summen av tre etterfølgende heltall.

går opp. Det er uklart om elevene ser sammenhengen mellom «+1»-strategien og det faktum at 36 er tre ganger nettopp 12. En samtale med elevene ville kanskje hjulpet oss her, men også i en samtale kan man risikere at der én elev ser en matematisk sammenheng som kan forklare en påstand, ser en annen bare et eksempel på en påstand.

Reid og Vallejo Vargas (2018) foreslår noen elementer lærere bør se på når de jobber med generiske eksempler sammen med elever[1], som Kirsti Rø og jeg har utvidet til følgende to punkter (Rø & Arnesen, 2020):

- Argumentet konkluderer med den generelle påstanden man skulle bevise;
- Argumentet inneholder et resonnement på eksempelet (den matematiske nøkkelideen for beviset synes i eksempelet), i tillegg til en eksplisitt løfting av dette resonnementet til det generelle.

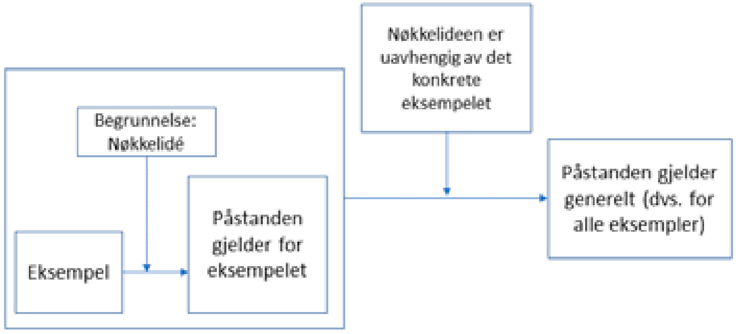
Når vi betrakter hele besvarelsen til disse elevene, finner vi at de har testet med fire forskjellige eksempler, enten med tall eller med systematisk oppstilte mengdemodeller, og at alle er markert med en pil for «+1» fra største til minste tall. Det står også skrevet at «vi mener at det stemmer at tre påfølgende tall alltid er delelig på 3», så man kan anta at elevene vet at det handler om en generell påstand her (de skriver påstanden selv i generell form). Det første punktet over er altså oppfylt. Når det kommer til det andre punktet, finnes det spor av et resonnement i eksemplene. Imidlertid står det ingenting om hvorfor det som skjer i eksemplene, er overførbart til et vilkårlig eksempel, så en eksplisitt løfting mangler. Dessuten avsluttes besvarelsen med teksten «vi har prøvd med flere tall. Det kan alltid deles på 3», altså et empirisk argument. Nøkkelideen i beviset («+1»-operasjonen) er der, men det er kanskje ikke tydelig for elevene at dette alltid må skje, for det er ingen løfting av denne ideen til det generelle. I neste del ser vi mer på utfordringer rundt denne delen av et generisk eksempel.

Mer om strukturen i et generisk eksempel

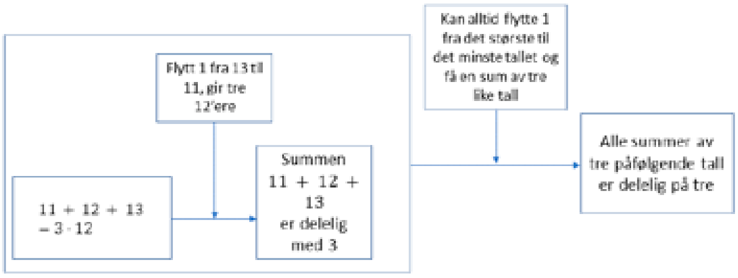
Når jeg og kollegaer jobber med generiske eksempler sammen med lærerstudenter, har vi erfart at den «eksplisitte løftingen» av resonneringen på eksempelet til det generelle er en van-

Krogh Arnesen, K. (2022). Generiske eksempler som argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(1), 2–8.

www.tangenten.no



Figur 4



Figur 5

skelig affære. I det første klasseromseksempelet besto denne løftingen av én setning: «Uansett hvilket partall det er, om vi bruker 12, 14 eller 20, så vil det alltid bare bestå av par.» I eksempelet med tre påfølgende tall kan vi tenke oss at vi tilføyer «når vi har tre påfølgende tall i en sum, kan vi alltid se for oss at vi flytter 1 fra det største til det minste tallet, og får tre like tall». Vi har imidlertid sett at lærerstudenter er litt for raske til å hoppe til det generelle, slik at de ikke bruker eksempelet til å argumentere for hvorfor påstanden holder (Rø & Arnesen, 2020). Dette har vi kalt et «sprangargument» (leap argument). Et sprangargument for påstanden om tre påfølgende tall kan se slik ut: «$4 + 5 + 6 = 15 = 5 \cdot 3$. Når vi har tre påfølgende tall i en sum, kan vi alltid se for oss at vi flytter 1 fra det største til det minste tallet, og får tre like tall, altså at summen er 3 ganger det mellomste tallet.» Problemet med dette argumentet er at eksempelet ikke egentlig spiller noen rolle her – nøkkelideen kommer kun fram gjennom den neste setningen, som er skrevet i generell form. Å gå rett på generell argumentasjon kan være greit dersom fellesskapet godtar det, også på barneskolen, men det er ikke nødvendigvis slik. I verste fall kan vi se for oss at slike sprangargumenter forvirrer elever (de blir overrumplet av det generelle og abstrakte), og at det styrker ideen deres om at empiriske argumenter er greit (argumentet inneholder jo et eksempel som ikke brukes generisk).

«Løsningen» som Kirsti og jeg skisserte på dette problemet, var å være bevisst på at et generisk eksempel består av to deler, som henger sammen: Først presentere et eksempel og vise hvorfor påstanden holder for eksempelet. Deretter en presisering av hvordan, hvorfor eller bare at dette argumentet ikke var avhengig av tallene som ble brukt, men egenskaper ved dem – og at argumentet derfor kan benyttes på alle andre tall med disse egenskapene. Dette er en måte å beskrive strukturen i et generisk eksempel på. Figur 4 viser et «flytskjema» for hvordan dette kan se ut. Den første delen, i en egen «innkapsling» til venstre, handler bare om eksempelet, der nøkkelideen for argumentet etablerer at påstanden gjelder i dette tilfellet. Deretter må man få fram at, eller hvorfor, man kan gjøre det samme for alle eksempler. Først nå bruker man et generelt språk – her generaliseres det man så i eksempelet.

I figur 5 ser vi strukturen i det generiske eksempelet om summen av tre påfølgende tall.

Krogh Arnesen, K. (2022). Generiske eksempler som argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(1), 2–8.

www.tangenten.no

Avsluttende kommentarer

Hensikten med denne artikkelen har vært å si noe om hva et generisk eksempel er, og også hva det ikke er. Det er viktig å skille empirisk argumentasjon ved bruk av eksempler fra argumentasjon ved bruk av generiske eksempler. Førstnevnte anerkjennes ikke som gyldig i matematikk, verken på skolenivå eller vitenskapelig nivå. Jeg har også forsøkt å tydeliggjøre hva som skiller et generisk eksempel fra en generell logisk slutning: Begge argumenterer for en generell påstand, men det generiske eksempelet gjør det først og fremst gjennom et eksempel, istedenfor å kun bruke et generelt språk. Og det er nettopp her styrken til et generisk eksempel ligger: Ved å bruke et konkret eksempel til å få fram det som skjer, kan man både forklare og overbevise om en påstand på en måte som er tilgjengelig for elever på alle nivåer.

Noter

1 Reid og Vallejo Vargas tar fortrinnsvis for seg skriftlige argumenter, mens Kirsti og jeg ikke legger en slik begrensning for disse kriteriene.

Referanser

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216–235). Hodder & Stoughton.

Harel, G. & Sowder, L. (1996). Classifying processes of proving. I L. Puig, & A. Guitierrez (Red.), *Proceedings of the XXth Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 3, s. 59–66). Universitat de València.

Reid, D. & Vallejo Vargas, E. (2018). When Is a Generic Argument a Proof? I Stylianides, A. J. & Harel, G. (Red.), *Advances in mathematics education research on proof and proving* (s. 239–251). Springer International Publishing.

Rowland, T. (1998). Conviction, explanation and generic examples. I Olivier, A. & Newstead, K. (Red.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 4, s. 65–72). University of Stellenbosch.

Rø, K. & Arnesen, K. K. (2020). The opaque nature of generic examples: The structure of student teachers' arguments in multiplicative reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 58.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 1–12.

Stylianides, G. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 9–16.

Krogh Arnesen, K. (2022). Generiske eksempler som argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(1), 2–8.